Polígonos

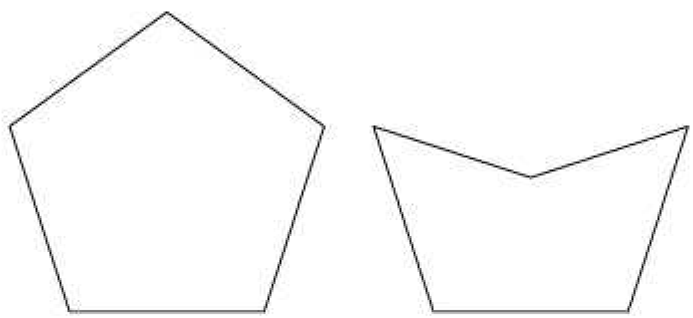
Es una figura plana cerrada con n lados. El nombre proviene del griego ' Poly' que significa muchos y de ' gonia', que significa ángulo. La generalización del concepto a 3 dimensiones se llama Poliedros y a n dimensiones Politopos.

Polígono Convexo

Un polígono es convexo si todos los segmentos que unen sus vértices (diagonales) están contenidos dentro de éste.

Polígono Cóncavo

Un polígono es cóncavo si uno o más segmentos que unen sus vértices no están contenidos dentro de éste.



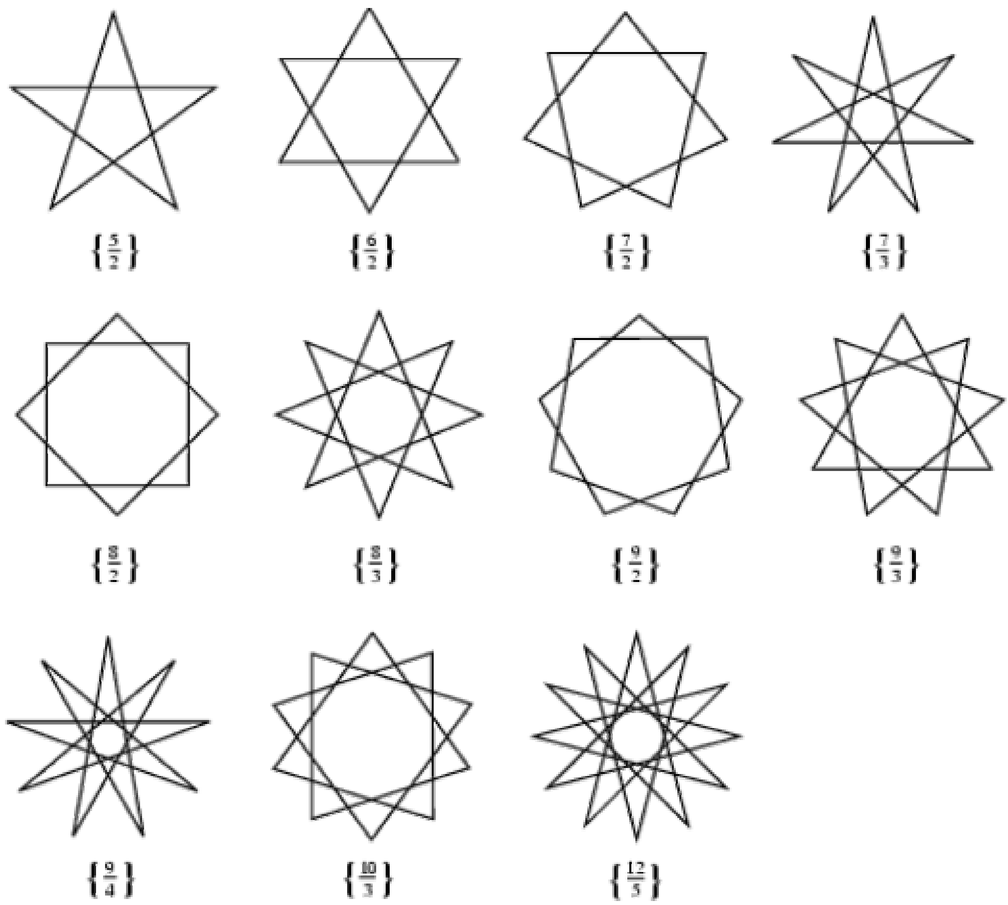
Polígono Convexo   Polígono Cóncavo

↑ subir

Polígono de tipo estrella

Un polígono es de tipo estrella $\frac{p}{q}$ *y se genera conectando mediante un segmento cada q puntos de todos los puntos p espaciados regularmente sobre una circunferencia.*

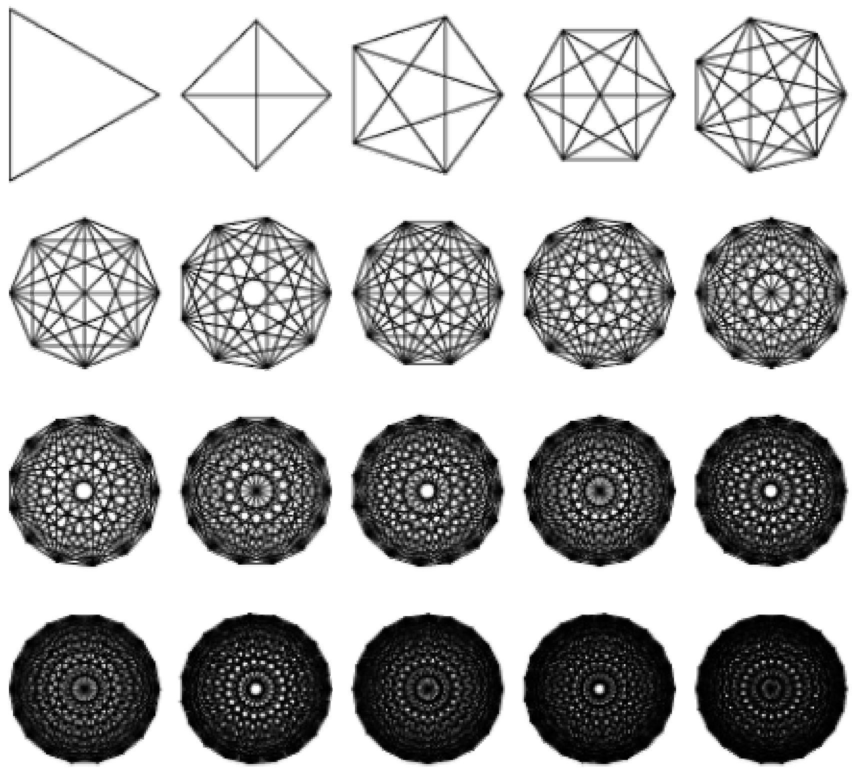
Al número q se le conoce como densidad de un polígono estrella.



p / q	*Polígonos*
Si q = 1	Polígono de p lados
5 / 2	Pentagrama
6 / 2	Hexagrama o Estrella de David
8 / 2	Estrella de Lakshmi
8 / 3	Octagrama
10 / 3	Decagrama
12 / 5	Dodecagrama

Siempre se cumple que $q < \dfrac{p}{2}$

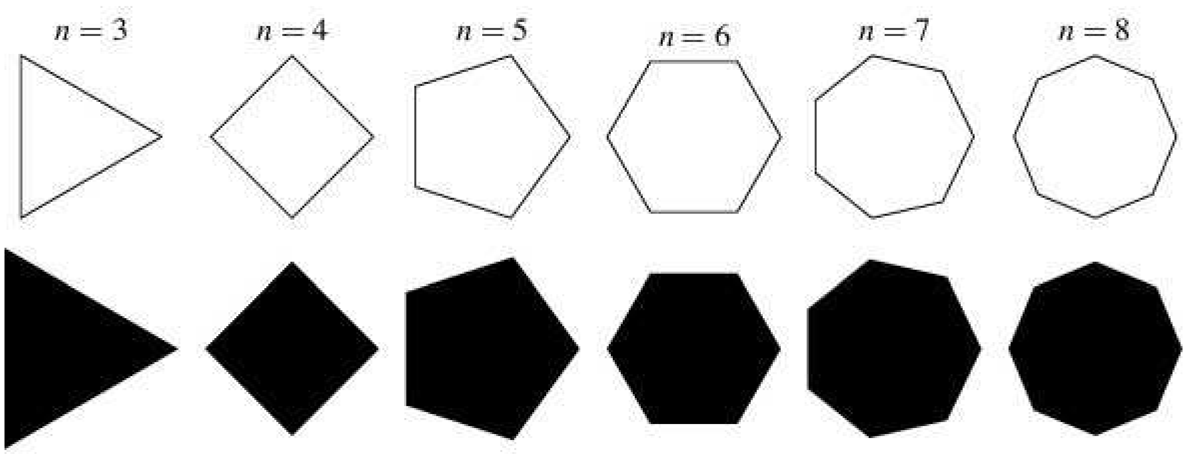
Superponiendo todos los distintos tipos de polígonos estrella se obtienen bellos patrones, algunos de los cuales están graficados mas abajo :



↑ subir

Polígono Regular

Si los lados son iguales entre sí y los ángulos también, entonces el polígono es regular.

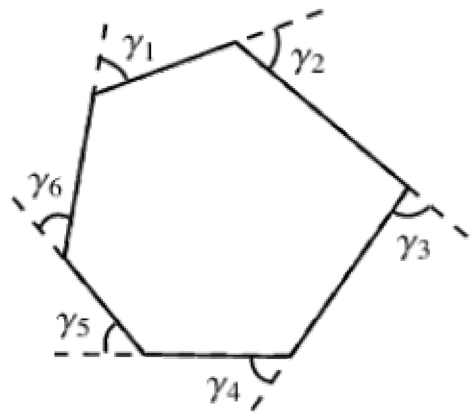


Triángulo equilátero	Cuadrado	Pentágono Regular	Hexágono Regular	Heptágono Regular	Octágono Regular

Elementos de un polígono

Angulo interior: *Angulo* ($< x_i$) *entre los lados por dentro del polígono.*

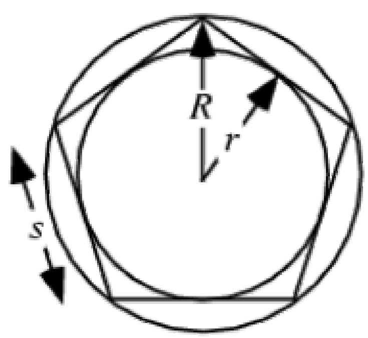
Angulo exterior: *Suplemento del ángulo interior de un polígono* $< y_i = 180° - < x_i$



Apotema: *Distancia más corta entre el centro y un lado del polígono. Equivale al radio r de la circunferencia inscrita (tangente por dentro) en el polígono.*

Radio: *Distancia entre el centro y un vértice cualquiera del polígono. Equivale al radio R de la circunferencia circunscrita (tangente por fuera) del polígono.*

Vértice: *Puntos de intersección entre los lados del polígono (para n lados tienes n vértices).*



Perímetro de un polígono regular

$p = n \cdot s$

donde n = *número de lados;* s = *longitud del lado*

Perímetro de un polígono regular doblando el número de lados

$$p_{2n} = 2\,n\,\sqrt{2\,R^2 - R\,\sqrt{4\,R^2 - s_n^{\,2}}}$$

donde n = *número de lados;* s_n = *lado del polígono con* n *lados;* R = *radio* ⊗ *circunscrita*

↑ subir

Area de un polígono regular

$$A = \frac{1}{2}\,n\,r\,s$$

$$A = \frac{1}{4}\,n\,s^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\,n\,r^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\,n\,R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)$$

donde n = *número de lados;* s = *longitud del lado;* r = *apotema;* R = *radio* ⊗ *circunscrita*

Area de un polígono regular doblando el número de lados

$$A_{2n} = \frac{4\,r\,A_n}{2\,r + \sqrt{r^2 + s_n^{\,2}}}$$

donde n = *número de lados;* r = *apotema o radio* ⊗ *inscrita*

↑ subir

Angulo interior de un polígono regular

$$< x_i = \frac{180\,^\circ}{n}\,n - 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} x_i = 180\,^\circ\,(n-2)$$

Angulo exterior de un polígono regular

$$< y_i = \frac{360\,^\circ}{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} y_i = 360\,^\circ$$

↑ subir

Diagonales de un polígono regular

$$d = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

💡 *Por cada vértice puedes tener una diagonal excepto por 3 de ellos con quienes formas los lados y el pto mismo. Esto considera un mismo segmento dos veces.*

Resumen de polígonos regulares

Nombre del Polígono	n	$< x_i$	$< y_i$	d	A	r	R
Triángulo equilátero	3	60	120	0	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
Cuadrado	4	90	90	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Pentágono	5	108	72	5	$\frac{5\,(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}$
Hexágono	6	120	60	9	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Heptágono	7	$\frac{900}{7}$	$\frac{360}{7}$	14	$\frac{7}{4}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{7}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{7}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Csc}[\frac{\pi}{7}]$
Octágono	8	135	45	20	$2\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{8}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{8}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Csc}[\frac{\pi}{8}]$
Nonágono	9	140	40	27	$\frac{9}{4}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{9}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{9}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Csc}[\frac{\pi}{9}]$
Decágono	10	144	36	35	$\frac{5\sqrt{\frac{1}{2}\,(5+\sqrt{5})}}{-1+\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\,(5+\sqrt{5})}}{-1+\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\,(1+\sqrt{5})$
Undecágono	11	$\frac{1620}{11}$	$\frac{360}{11}$	44	$\frac{11}{4}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{11}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{11}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Csc}[\frac{\pi}{11}]$
Dodecágono	12	150	30	54	$3\,(2+\sqrt{3})$	$\frac{1}{2}\,(2+\sqrt{3})$	$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
Tridecágono	13	$\frac{1980}{11}$	$\frac{360}{13}$	65	$\frac{13}{4}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{13}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cot}[\frac{\pi}{13}]$	$\frac{1}{2}\,\mathrm{Csc}[\frac{\pi}{13}]$

donde

n = número de lados; $< x_i$ = ángulo interior; $< y_i$ = ángulo exterior; d = diagonales

A = Area ; r = radio ⊗ inscrita; R = radio ⊗ circunscrita **(** *si lado $s = 1$* **)**

Definición de una circunferencia

Dado un punto O llamado centro y una distancia r llamada radio, se llama circunferencia de centro O y radio r al conjunto de puntos del plano que están a una distancia r del punto O.

Segmentos de la circunferencia

Radio

Es la distancia r entre el centro O de un círculo y su perímetro (o circunferencia):

Diámetro

Es la máxima distancia entre 2 puntos de una circunferencia ($\phi = 2r$)

• *NOTA: Necesariamente el diámetro pasa por el centro del círculo.*

Cuerda

Es un segmento dentro del círculo ($\overline{DE}$ *es una cuerda*) .

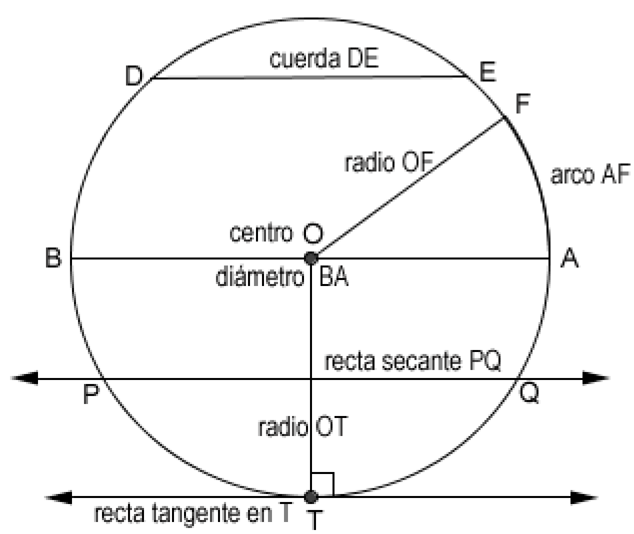
• *NOTA: El diámetro es la cuerda de mayor longitud.*

Secante

Es una recta infinita que corta en 2 puntos a una circunferencia $\left(\overleftrightarrow{PQ}\right.$ *es una secante*$\left.\right)$.

Tangente

Recta infinita que intersecta sólo en un punto a la circunferencia siempre perpendicular al radio (*recta tangente en T perpendicular al radio* $\overline{OT}$) .

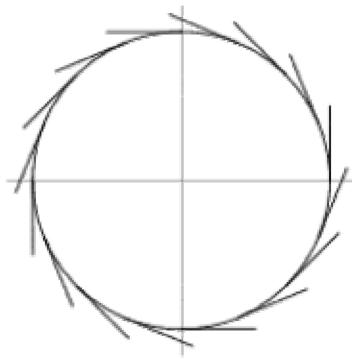


⇡ subir

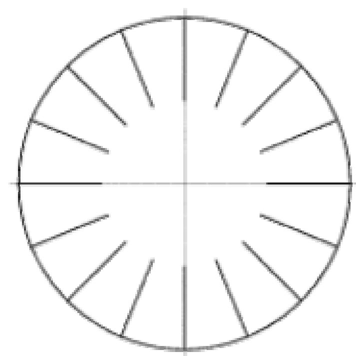
• *NOTA:*

El movimiento circunferencial puede ser descrito como vectores tangentes a la circunferencia y aceleración (centrípeta) perpendicular a dichos vectores

Dirección movimiento circunferencial



Dirección aceleración centrípeta (hacia el centro)

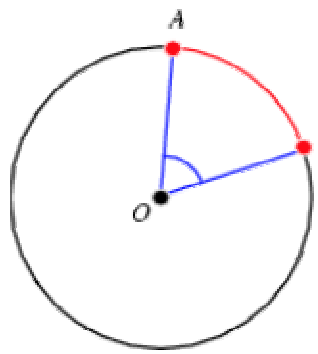


⇡ subir

Arco y Perímetro

Definición de arco

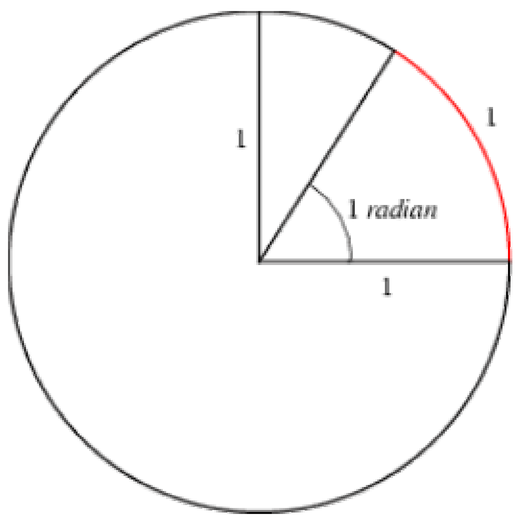
Un arco es cualquier porción (con excepción de la curva entera) de la circunferencia (o perímetro) de un círculo:



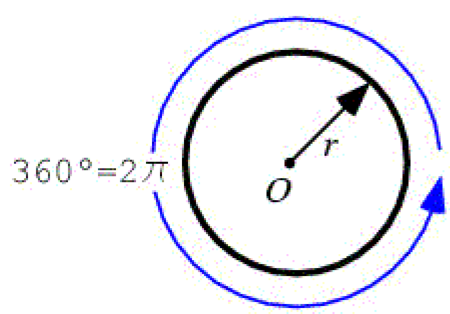
↑ subir

Definición de radián

Un radián de define como la medida del ángulo cuando los radios y el arco subtendido por éstos son iguales :



$$1\ rad \simeq 57.2958\ ° \Rightarrow \pi\ \ rad\ = 180\ ° \quad o \quad 2\ \pi\ \ rad\ = 360\ °$$



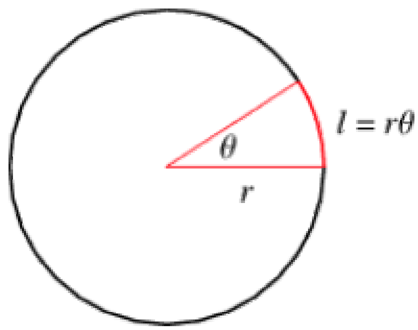
• *NOTA :*

Para transformar grados sexagesimales a radianes se resuelve: $\dfrac{x_{rad}}{\pi_{rad}} = \dfrac{\theta^{\circ}}{180^{\circ}}$

↑ subir

Longitud de arco

Para un círculo del radio r la longitud del arco l subtendida por un ángulo central θ *es proporcional a r, siempre y cuando* θ *se mida en radianes:*

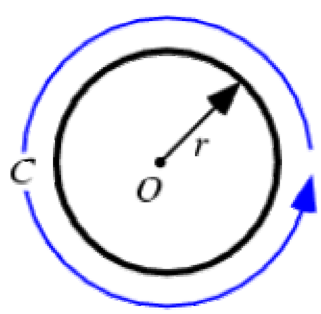


$$l = r\theta$$

↑ subir

Perímetro del círculo

Equivale a la longitud de la circunferencia o longitud de arco completa:



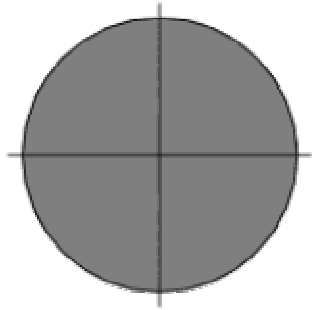
$$l = r\theta \quad \text{con } \theta = 2\pi_{rad} \quad \Rightarrow \quad p = 2\pi r$$

↑ subir

Areas

Area del círculo

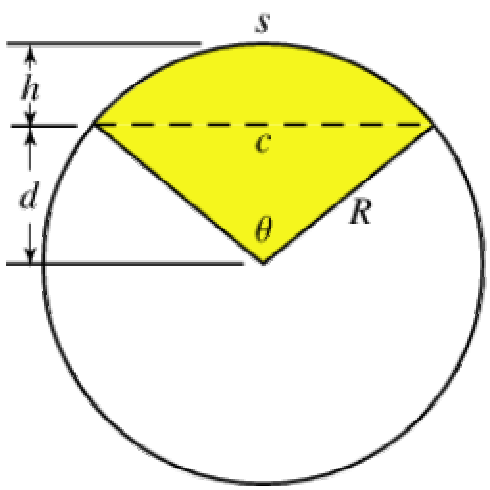
Es la superficie ocupada por un círculo :



$A = \pi\ r^2$

↑ subir

Sector circular



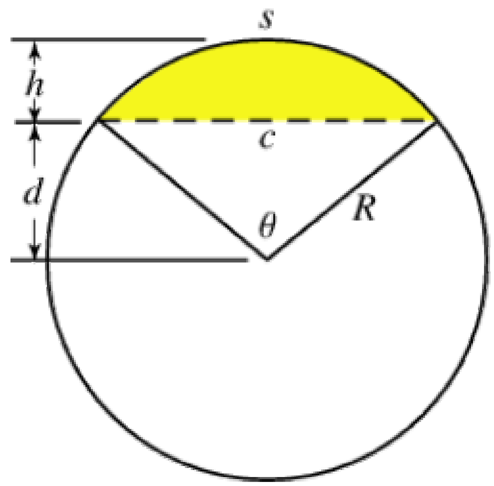
Es una porción del área del círculo encerrada por un ángulo central Θ **:**

▫ *Perímetro :* $p_S = l + 2\,r = r\Theta + 2\,r$

▫ *Area :* $A_S = \dfrac{\Theta}{2\,\pi}\,\pi\ r^2 = \dfrac{r^2\,\Theta}{2}$

↑ subir

Segmento circular



Es la porción del área del círculo encerrada por el segmento c entre 2 puntos de la circunferencia y el arco que comprenden dichos puntos :

Por trigonometría se obtiene :

$$c = 2\,r\,sen\left(\frac{\Theta}{2}\right);\;\; d = \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right);\;\; h = r - \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right);\;\; d + h = r$$

entonces

▫ *Perímetro :* $p_s = l + c = r\Theta + 2\,r\,sen\left(\frac{\Theta}{2}\right)$

▫ *Area :* $A_s = A_S - A_\Delta = \dfrac{r^2\,\Theta}{2} - \dfrac{r^2\,sen\,(\Theta)}{2} = \dfrac{r^2}{2}\,(\Theta - sen\,(\Theta))$

• *NOTAS :*

Si $\Theta \to 0$ *entonces :*

a) $c \to l$ *o bien* $\displaystyle \lim_{\Theta\to 0} \frac{c}{l} = \lim_{\Theta\to 0} \frac{2\,r\,sen\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{r\Theta} = 1 \;\Rightarrow\; 2\lim_{\Theta\to 0} \frac{sen\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{\Theta} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

b) $A_s \to 0$ *o bien* $\displaystyle \lim_{\Theta\to 0} \frac{A_s}{A_S} = \lim_{\Theta\to 0} \frac{\frac{r^2}{2}\,(\Theta - sen\,(\Theta))}{\frac{r^2\,\Theta}{2}} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{\Theta\to 0} \frac{\Theta - sen\,(\Theta)}{\Theta} = 0$

Definición

Una esfera se define como el Lugar Geométrico de todos aquellos puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro y cuya distancia se denomina R.

– *Generatriz rotando en torno el eje X :*

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad con \quad -R \le x \le R$$

– *Generatriz rotando en torno el eje Y :*

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} \quad con \quad -R \le y \le R$$

– *Coordenadas Cartesianas :*

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

– *Coordenadas Paraméticas :*

$$x = \sqrt{R^2 - z^2}\ cos\,(\Theta);\ y = \sqrt{R^2 - z^2}\ sen\,(\Theta);\ z = z$$

$$con \quad 0 \le z \le R$$

– *Coordenadas Esféricas :*

$$\rho = R \quad con \quad 0 \le \Theta \le 2\pi;\ 0 \le \phi \le \pi$$

Esfera como modelo terrestre

Si la esfera fuera el modelo matemático de la forma de la Tierra mediante coordenadas esféricas :

– *Radio de la Tierra*

$$\rho = R_{Tierra} = 6378\ km\ (radio\ ecuatorial)$$

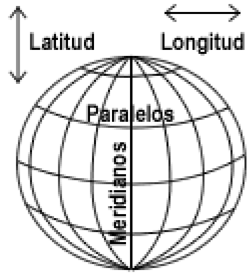
– *Longitud (grados hacia oriente u occidente del meridiano de Greenwich) :*

$$Este\ 0° \le \Theta \le 180°\ ;\ Oeste\ -180° \le \Theta \le 0°$$

– *Latitud (grados hacia el Norte o Sur del Ecuador o paralelos) :*

$$Norte\ 0° \le \phi \le 90°\ ;\ Sur\ -90° \le \phi \le 0°$$

donde el ángulo ϕ está definido entre el plano XY y el vector dirección $\overrightarrow{R}$



↑ subir

Volumen

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Mediante sólido de revolución

Podemos generar la esfera rotando la semicircunferencia $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ en torno al eje X

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2\,dx = 2\pi \int_{0}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{R} R^2 - x^2\,dx = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

↑ subir

Volumen de un casquete

Se define un casquete como una porción de superficie de la esfera cortada por

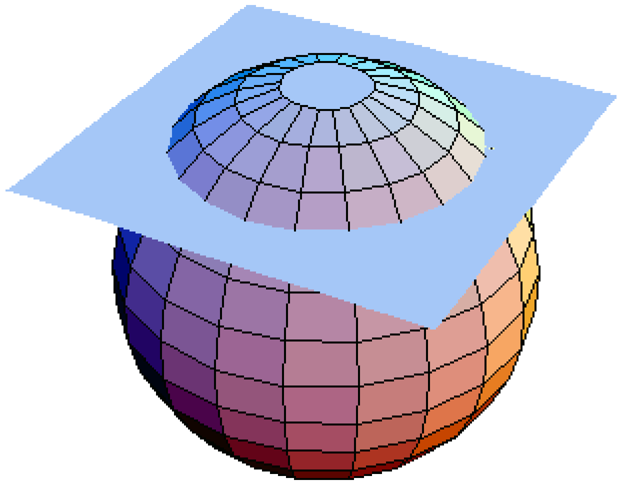
un plano que no pasa por su centro y su volumen viene dado por:

$$V_C = \frac{2}{3}\pi\; h\,(h^2 - 3\,h\,R + 3\,R^2)$$

Demostración

Podemos generar el casquete rotando la semicircunferencia $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ en torno al eje Y

pero una porción entre $y = y_0$ e $y = R$ donde $h = R - y_0$



$$V_c = \pi \int_{R-h}^{R} x^2\, dy = \pi \int_{R-h}^{R} \left(\sqrt{R^2 - y^2}\right)^2 dy = \pi \int_{R-h}^{R} R^2 - y^2\, dy$$

$$V_c = \pi \left(\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left((R-h)^3 - \frac{(R-h)^3}{3} \right) \right) = \frac{2}{3} \pi \left(R^3 - (R-h)^3 \right)$$

$$V_c = \frac{2}{3} \pi\ h\,(h^2 - 3\,h\,R + 3\,R^2)$$

↑ subir

Superficie

$S = 4\,\pi R^2$ donde R: Radio de la esfera

Mediante sólido de revolución

Ocupando la diferencial de superficie de revolución $ds = 2\,\pi\, y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$,

generando la esfera rotando en torno al eje X la circunferencia de ecuación

$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ pero tomamos la porción positiva!

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} \, dx = 4\pi \int_0^R R \, dx$$

$$S = 4\pi \int_0^R R \, dx = 4\pi R^2$$

subir

Mediante integrales dobles

Despejando z de la ecuación cartesiana tenemos la superficie $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

y ocupando la diferencial de superficie $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \, dA$:

$$S = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)^2} \, dy \, dx$$

$$S = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dy \, dx$$

haciendo cambio a coordenadas polares $\left(x = r\cos(\Theta); \; y = r\,\mathrm{sen}(\Theta); \; \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \Theta)} = r \right)$

$$S = R \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr \, d\Theta = R^2 \int_0^{2\pi} d\Theta = 2\pi R^2$$

Sin embargo sólo tomamos en cuenta la superficie de arriba.

Sumamos la superficie de la mitad inferior de la esfera (por simetría de igual valor) y nos queda finalmente :

$$S = 4\pi R^2$$

subir

Superficie de un casquete

$$S_c = 2\pi R h$$

Demostración

Podemos generar el casquete rotando la semicircunferencia $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ *en torno al eje Y*

pero con $y_0 \leq y \leq R$ *donde* $h = R - y_0$

Ocupando la diferencial de superficie de revolución $ds = 2\pi x \sqrt{1 + (x')^2}\, dy$

si $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x' = -\dfrac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}$ *pero tomamos la porción positiva !*

$$S_c = 2\pi \int_{R-h}^{R} \sqrt{R^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}\right)^2}\, dy = 2\pi \int_{R-h}^{R} R\, dy$$

$$S_c = 2\pi (R^2 - R(R-h)) = 2\pi R h$$

⇧ subir

Distancia entre 2 puntos :

Coordenadas Cartesianas :

$$d = R \arccos\left(\frac{x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1}{R^2}\right) \quad con\ P = (x_0, y_0, z_0)\ y\ Q = (x_1, y_1, z_1) :$$

Demostración :

Considerando la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

podemos tener un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ *y* $Q = (x_1, y_1, z_1)$ *que satisface la ecuación*

cartesiana por lo que se cumple que $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2 \ \wedge\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R^2$

Como el centro de la esfera es el origen entonces P y Q generan un vector dirección :

$\vec{P} = (x_0, y_0, z_0)$ *y* $\vec{Q} = (x_1, y_1, z_1)$

Calculando el ángulo entre éstos mediante el producto punto $\cos(\Theta) = \dfrac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{|\vec{P}|\ |\vec{Q}|}$ *:*

$$\theta = \arccos\left(\frac{(x_0, y_0, z_0)\cdot(x_1, y_1, z_1)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\,\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\right) = \arccos\left(\frac{(x_0, y_0, z_0)\cdot(x_1, y_1, z_1)}{\sqrt{R^2}\,\sqrt{R^2}}\right)$$

Ahora mediante la definición de ángulo en radianes $\theta_{rad} = \dfrac{l}{R}$ *despejamos el arco* l:

$$l = R\,\theta = R \arccos\left(\frac{x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1}{R^2}\right)$$

⇡ subir

Latitud y Longitud:

$$d = R \arccos\left(\cos(\phi_0)\cos(\phi_1)\cos(\theta_1 - \theta_0) + \operatorname{sen}(\phi_0)\operatorname{sen}(\phi_1)\right)$$

con $P = (R, \theta_0, \phi_0)$ *y* $Q = (R, \theta_1, \phi_1)$

donde

ϕ = *Latitud* (*ángulo definido entre el plano XY y el vector dirección* $\overline{R}$)

θ = *Longitud* (*ángulo de dirección en el plano XY*)

Demostración:

Ocupando la fórmula de distancia entre 2 ptos de la esfera y transformando a

a coordenadas esféricas (*con* ϕ *definido entre el plano XY y el vector dirección* $\overline{R}$)

$x = \rho\cos(\theta)\cos(\phi)$; $y = \rho\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi)$; $z = \rho\operatorname{sen}(\phi)$

$$d = R_T \arccos\left(\cos(\phi_0)\cos(\phi_1)\cos(\theta_1 - \theta_0) + \operatorname{sen}(\phi_0)\operatorname{sen}(\phi_1)\right)$$

donde en el caso de la Tierra aproximadamente esférica:

$\rho = R_T$

θ = *Longitud* (*Este*: $0° \le \theta \le 180°$ *Oeste*: $-180° \le \theta \le 0°$)

ϕ = *Latitud* (*Norte*: $0° \le \phi \le 90°$ *Sur*: $-90° \le \phi \le 0°$)

⇡ subir

Centroide

Considerando que la esfera tiene la misma distribución de volumen en cualquier dirección en el espacio 3 D a partir de su centro.

Momento de Inercia

$- \text{Esfera sólida}: \; I_Z = \dfrac{2}{5} MR^2$

$- \text{Esfera hueca}: \; I_Z = \dfrac{M}{5R^3}(R^2 - r^2)^{3/2}(2R^2 + r^2)$

donde

R = *Radio o distancia cte de los ptos de la superficie al centro de la esfera*

r = *Radio de la porción hueca (definida por $r = R -$ espesor cáscara superficial)*

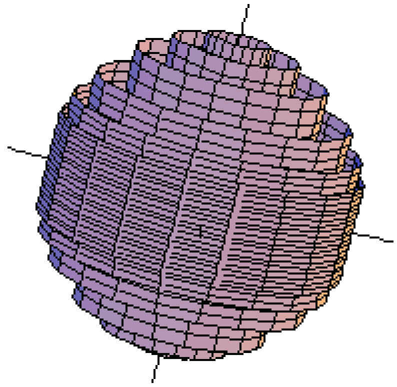
M = *Masa del sólido esfera*

⇡ subir

Esfera sólida

Considerando la esfera centrada en el origen generamos el volumen ''enrollando'' superficies de cilindros en torno al eje Z, con alturas de acuerdo a la función

$h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, *equivalente a una cuerda perpendicular al eje X de la circunferencia de ecuación* $x^2 + z^2 = R^2$



Se define el Momento de Inercia como $I_Z = \int x^2\, dm$

donde

x *= Distancia al eje Z*

$dm = \rho dV \left(con \quad \rho = D = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\ R^3} \quad \text{suponiendo un cuerpo homogéneo} \right)$

$dV = 2\pi\ x\, h\, dx$ *(Superficie de cilindros de radio = x; altura = h; espesor = dx)*

Por lo tanto

$$I_Z = \int_0^R x^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\ R^3} 2\pi\ x \left(2\sqrt{R^2 - x^2}\right) dx = \frac{3M}{R^3} \int_0^R x^3 \sqrt{R^2 - x^2}\ dx$$

$$I_Z = \frac{3M}{R^3} \int_0^R x^3 \sqrt{R^2 - x^2}\ dx$$

haciendo $u^2 = R^2 - x^2 \ \rightarrow\ 2\,u\,du = -2\,x\,dx$

$$I_Z = -3\frac{M}{R^3} \int_R^0 (R^2 - u^2)\,u^2\,du = 3\frac{M}{R^3} \int_0^R (R^2 - u^2)\,u^2\,du$$

$$I_Z = 3\frac{M}{R^3}\left(\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{5}\right) = \frac{2}{5} MR^2$$

⇡ subir

Esfera hueca

Asumiendo que r es el radio de la esfera hueca o bien r = R − espesor de la capa superficial

se razona de la misma forma sólo que x varía entre r y R:

$$I_Z = \frac{3M}{R^3}\int_r^R x^3\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{3M}{R^3}\int_r^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\,x\,dx$$

haciendo $u^2 = R^2 - x^2 \;\rightarrow\; 2\,u\,du = -2\,x\,dx$

$$I_Z = -3\,\frac{M}{R^3}\int_{\sqrt{R^2-r^2}}^{0}(R^2-u^2)\,u^2\,du = 3\,\frac{M}{R^3}\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}}(R^2-u^2)\,u^2\,du$$

$$I_Z = 3\,\frac{M}{R^3}\left(R^2\,\frac{(R^2-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{(R^2-r^2)^{5/2}}{5}\right) = \frac{M}{5\,R^3}\,(R^2-r^2)^{3/2}\,(2\,R^2+r^2)$$

⇡ subir

Geometría Esférica

Algunas definiciones y postulados de la Geometría Esférica:

– *El trazado entre dos puntos se denomina geodésica y siempre corresponde a un segmento de arco.*

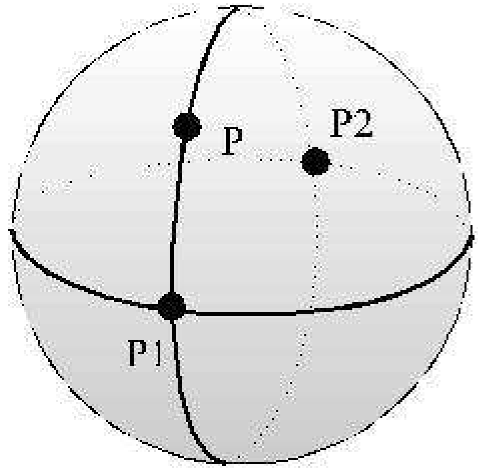
– *La máxima longitud de una línea es* $2\,\pi R$ *(por ejemplo los meridianos terrestres)*

– *La distancia más corta entre 2 puntos está dada por un arco de una circunferencia máxima (por ejemplo los meridianos) sobre la superficie esférica.*

– *Puntos opuestos son aquellos que tienen máxima distancia entre ellos* $(d_{max} = \pi R)$

– *La recta que pasa por puntos opuestos define una circunferencia máxima.*

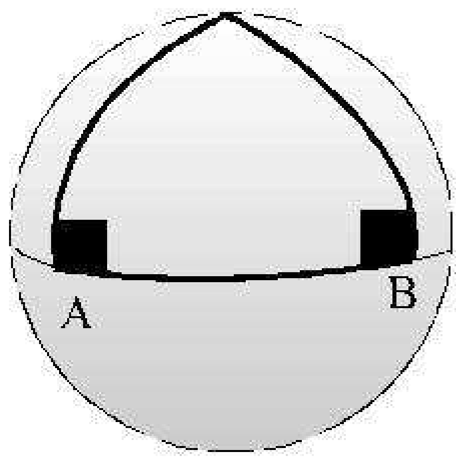
– *No existen rectas paralelas, y cualquiera sean siempre tienen 2 puntos de intersección.*



– *La suma de los ángulos internos de un triángulo suman entre 180 ° y 540 ° dependiendo de su tamaño y forma.*

– *Un triángulo esférico con uno, dos o tres ángulos rectos se denomina rectángulo, birrectángulo o trirrectángulo respectivamente*

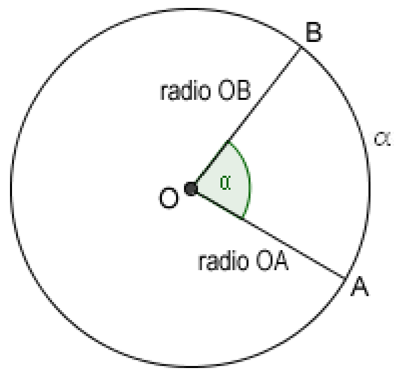
– *Un triángulo esférico en que uno dos o tres lados son cuadrantes (cuarto de circunferencia máxima de la esfera) se denomina triángulo cuadrantal, bicuadrantal o tricuadrantal.*



Angulos en la circunferencia

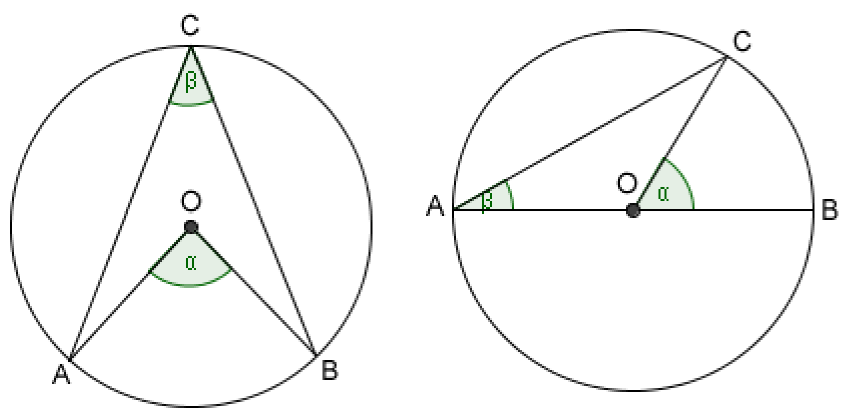
Angulo central

Se define como ángulo central el ángulo α formado por 2 radios desde el centro O del círculo y es igual a la abertura angular del arco :



Angulo inscrito

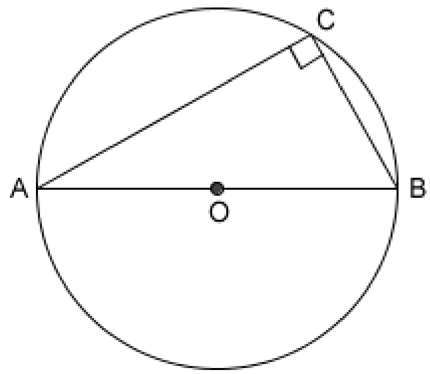
El ángulo inscrito β es el ángulo formado por dos cuerdas a partir de un punto sobre la circunferencia :



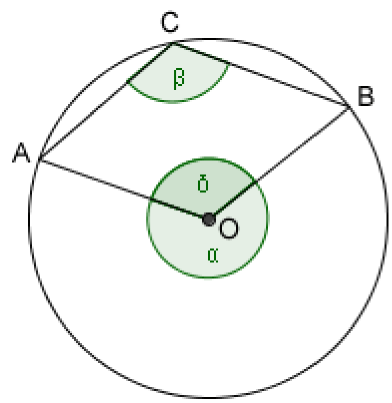
$\alpha = 2\,\beta$

La relación entre un ángulo central α es el doble que uno inscrito β que suscriban el mismo arco (en este caso el arco AB).

•NOTA : Lo anterior trae por consecuencia que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo.



En el caso que el arco subtendido sea mayor a 180 ° entonces se genera un cuadrilátero inscrito en una semicircunferencia con un vértice en el centro de ésta.

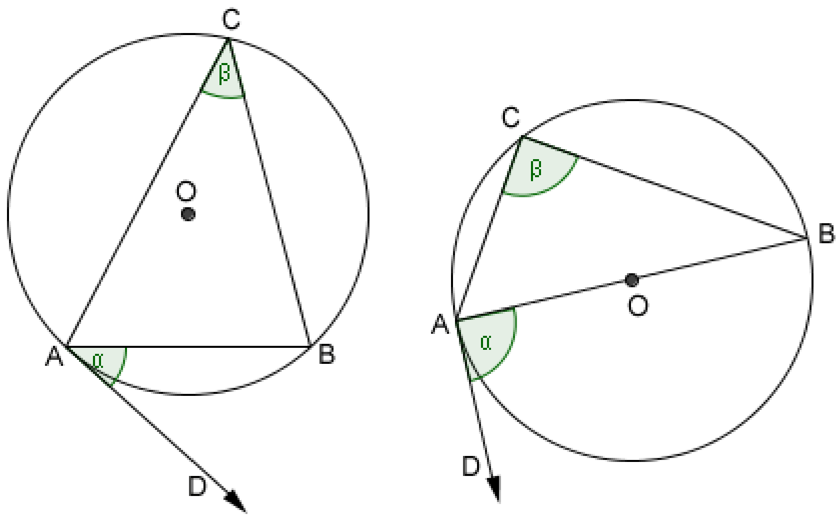


$$\alpha = 2\beta \Rightarrow 360 - \delta = 2\beta \quad \text{o bien} \quad 2\beta + \delta = 360$$

⇧ subir

Angulo semi – inscrito

El ángulo semi – inscrito α *es el ángulo formado por la tangente* $\overleftrightarrow{AD}$ *y la cuerda* $\overline{AB}$ *quedando una porción de éste fuera del círculo.*



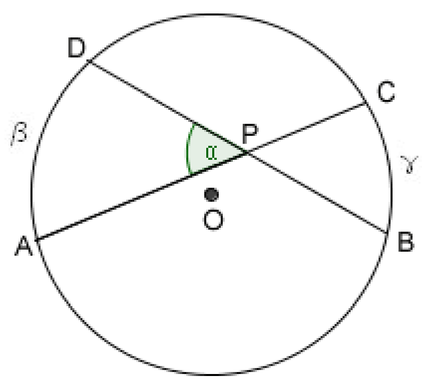
$\alpha = \beta$

En particular se cumple que este ángulo equivale al ángulo inscrito β *que suscribe el arco entre la tangente y el otro extremo de la cuerda* $\overline{AB}$.

⇡ subir

Angulo interior

Es el ángulo α *formado por dos cuerdas* $\overline{AC}$ *y* $\overline{DB}$ *que se intersectan en* P *al interior de la circunferencia:*

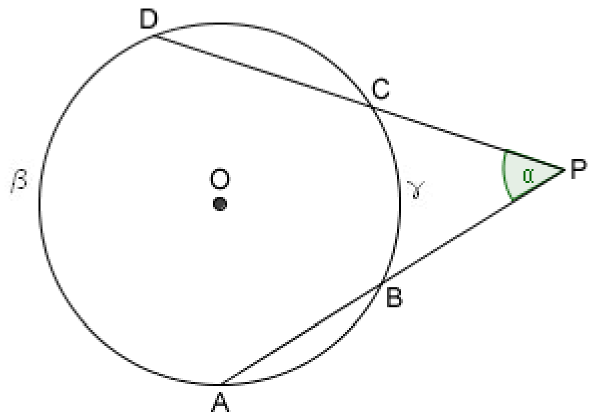


$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

⇡ subir

Angulo exterior

Es el ángulo α *formado por dos secantes* $\overleftrightarrow{AB}$ *y* $\overleftrightarrow{DC}$ *que se intersectan fuera del círculo en* P *:*

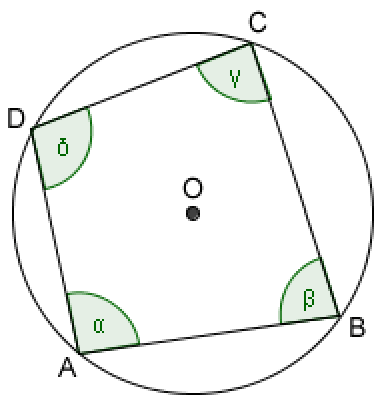


$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

⇡ subir

Angulos en un cuadrilátero inscrito

Para todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia la suma de los ángulos opuestos es 180 ° .

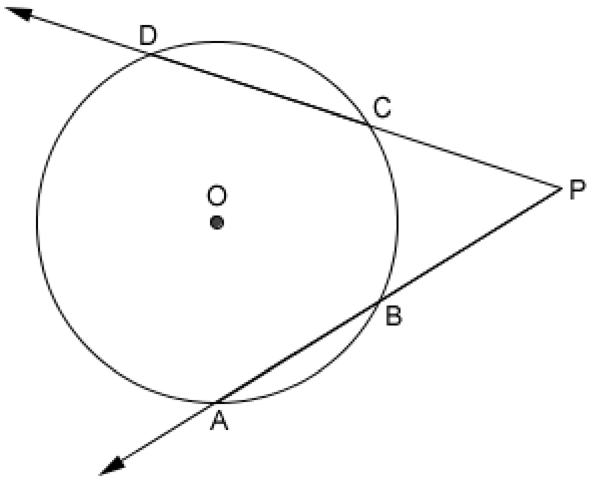


$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$$

⇡ subir

Segmentos en la circunferencia

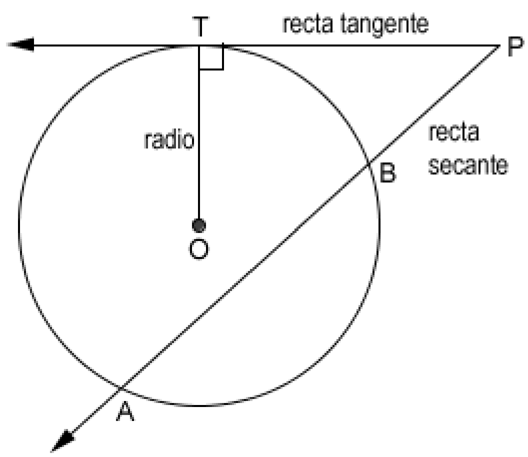
Secantes



$$\overline{AP} \times \overline{BP} = \overline{CP} \times \overline{PD}$$

↑ subir

Tangente − Secante



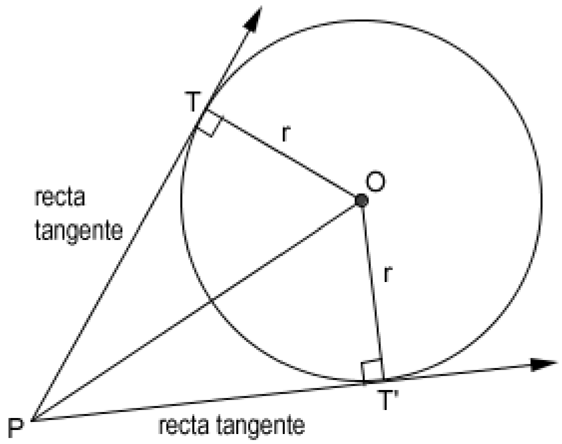
$$\overline{AP} \times \overline{BP} = \overline{PT}^{\,2}$$

↑ subir

Tangente − Tangente

$$\overline{PT} = \overline{PT'}$$

$$\overline{OT}^2 + r^2 = \overline{OP}^{\,2}$$



$$\overline{PT} = \overline{PT'}$$

$$\overline{OT}^2 + r^2 = \overline{OP}^2$$

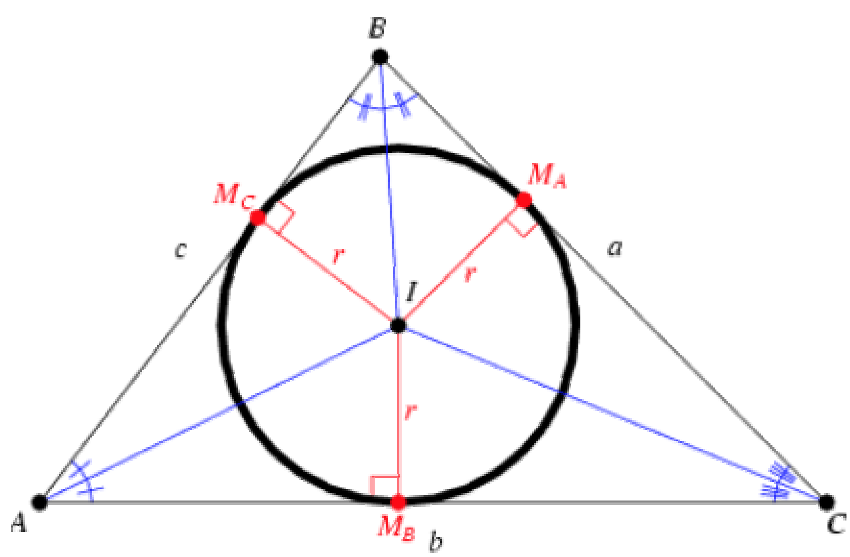
$$\overline{OT'}^2 + r^2 = \overline{OP}^2$$

↑ subir

Circunferencia inscrita

En un triángulo

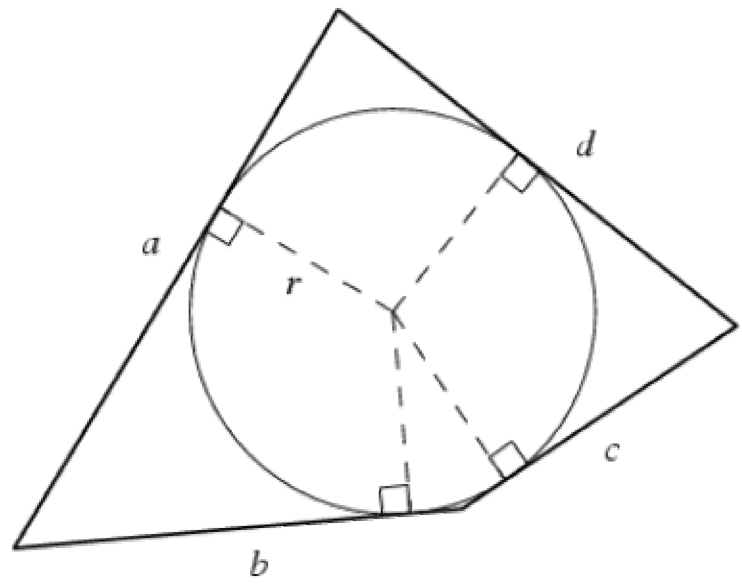
El centro de la circunferencia inscrita en un triángulo (incentro) es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo :



↑ subir

En un cuadrilátero

La suma de los lados contrarios (no adyacentes entre sí) son iguales :



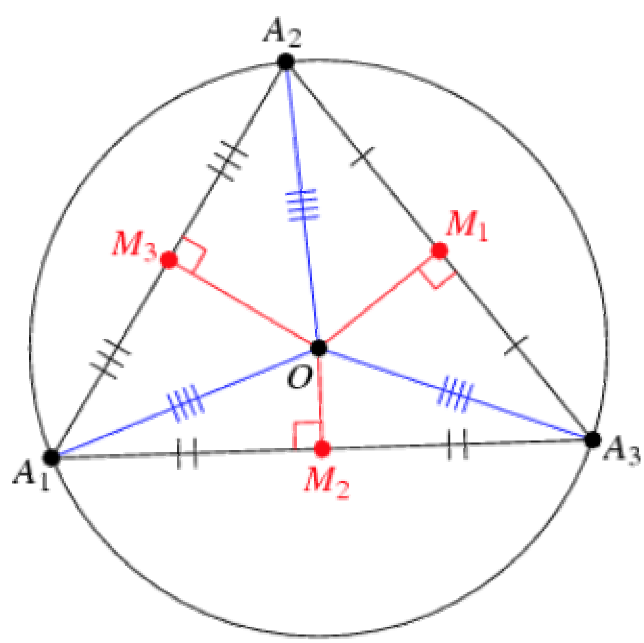
$a + c = b + d$

• *NOTA: Los segmentos de las tangentes que se intersectan son iguales.*

⇡ subir

Circunferencia circunscrita a un triángulo

El centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo (circuncentro) es la intersección de las simetrales del triángulo resaltadas en rojo:



• *NOTA: Las simetrales son las perpendiculares a los puntos medios de los lados.*

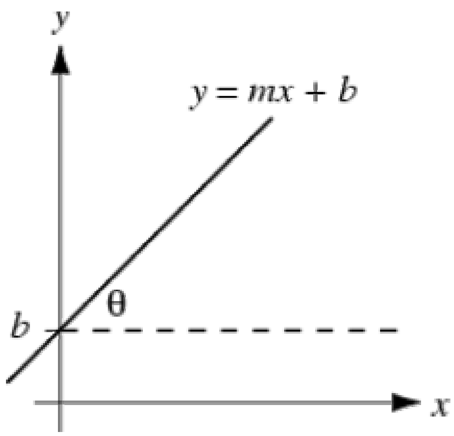
Distancia entre dos puntos $P = (x_0 , y_0) \wedge Q = (x_1 , y_1)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Ecuación de la recta

Pendiente entre dos puntos $P = (x_0 , y_0) \wedge Q = (x_1 , y_1)$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan(\Theta) \quad \text{con } x_0 \neq x_1 \wedge \Theta \text{ ángulo de inclinación respecto al eje X.}$$



• *NOTAS:*

– Si $m > 0$ la recta es creciente; si $m < 0$ la recta es decreciente de izquierda a derecha..

– La pendiente indica inclinación cambia unidades en y a medida que avanzo 1 unidad a la derecha.

– que pasa por dos puntos $(x_0 , y_0) \wedge (x_1 , y_1)$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad o \quad y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

↑ subir

– que pasa por un punto (x_0 , y_0) y con pendiente conocida m

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

– forma principal (cuando se despeja la variable y) :

$y = mx + n$

donde m: pendiente; n = coeficiente de posición (pto de corte con el eje Y)

– forma general (cuando se deja un miembro de la ecuación en cero):

$ax + by + c = 0$

– rectas paralelas

Si $L_1: y = m_1 x + n_1 \wedge L_2: y = m_2 x + n_2$ entonces

L_1 es paralela a L_2 si $m_1 = m_2$

– rectas perpendiculares

Si $L_1: y = m_1 x + n_1 \wedge L_2: y = m_2 x + n_2$ entonces

L_1 es perpendicular a L_2 si $m_1 \cdot m_2 = -1$

subir

– ángulo entre rectas (si $L_1: y = m_1 x + n_1 \wedge L_2: y = m_2 x + n_2$)

$$\measuredangle(L_1, L_2) = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$$

• NOTA: Si $1 + m_1 m_2 \to 0$ $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \to \infty \wedge \measuredangle(L_1, L_2) \to 90°$

$\Rightarrow$ si $m_1 \cdot m_2 = -1$ entonces L_1 es perpendicular a L_2

– distancia entre un punto $P = (x_0, y_0) \wedge$ una recta $L: y = mx + n$

$$d(P, L) = \frac{|y_0 - mx_0 - n|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

– distancia entre un punto $P = (x_0, y_0) \wedge$ una recta $L: ax + by + c = 0$

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

– distancia entre dos rectas paralelas (si $L_1: y = mx + n_1 \wedge L_2: y = mx + n_2$)

$$d(L_1, L_2) = \frac{|n_2 - n_1|}{\sqrt{1+m^2}}$$

⇡ subir

Ecuación de una simetral entre (x_1, y_1) (x_2, y_2)

La simetral es la perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

$$y - y_0 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(x_0 - x)$$

donde $(x_0, y_0) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ *es el punto medio.*

⇡ subir

Intersección de Rectas

Se lleva las ecuaciones de las rectas a la forma general:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

$(con\ c_1 = -c_1;\ c_2 = -c_2)$

– mediante igualación

despejamos una de las variables de ambas ecuaciones e igualamos (en este caso y):

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2} \Rightarrow x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

ahora reemplazas la x en una de las expresiones y:

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = \frac{c_1 - a_1 \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}{b_1} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

⇡ subir

$-$ *mediante sustitución*

despejamos una de las variables de una ecuación
(en este caso variable y de la primera ecuación) y sustituimos en la otra ecuación:

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} \rightarrow \text{ sustituye en } \; a_2 x + b_2 y = c_2$$

nos queda:

$$a_2 x + b_2 \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c_2 \;\Rightarrow\; x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

⇡ subir

$-$ *mediante reducción*

Intentamos mediante una ponderación igualar 2 coeficientes (de las misma variable)
pero con signo contrario para luego sumar las ecuaciones.

💡 *Ejemplo:*

Sea el sistema $\begin{aligned} -2x + 4y &= 5 \\ x + 3y &= -2 \end{aligned}$

basta sólo con multiplicar por 2 la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} -2x + 4y &= 5 \\ x + 3y &= -2 \;\; / \cdot 2 \end{aligned}$$

nos queda:

$$\begin{aligned} -2x + 4y &= 5 \\ 2x + 6y &= -4 \end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones:

$$10y = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{10}$$

lo que reemplazamos en la ecuación más simple (en este caso la 2)

$$x + 3\frac{1}{10} = -2 \;\Rightarrow\; x = -\frac{23}{10}$$

– *mediante determinantes o Regla de Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

• *NOTA: Para una explicación más detallada vea el formulario de Determinantes*

↑ subir

Parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$

Concavidad

– *Si* $a > 0 \Rightarrow$ *parábola convexa, con mínimo en el vértice.*

En este caso el recorrido de la función parábola es $Rec\ f(x) = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, \infty \right[$

– *Si* $a < 0 \Rightarrow$ *parábola cóncava, con máximo en el vértice.*

En este caso el recorrido de la función parábola es $Rec\ f(x) = \left] -\infty, \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$

Eje de simetría y vértice

Eje de simetría es una recta desde la cual se distribuye en forma simétrica la curva parabólica. En ella se encuentra el vértice:

– *Eje de simetría:* $x = -\frac{b}{2a}$

– *Vértice* $= \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a} \right) \right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$

Intercepto con el eje Y

Es el punto de intersección entre la parábola y el eje Y

(*donde* $x = 0 \therefore$ *al evaluar obtenemos* $y = c$)

↑ subir

Raíces de la ecuación (o interceptos con el eje X)

Nacen de resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ *(pues el eje X se ubica en la recta* $y = 0$ *)*

▫ *Demostración :*

Como $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a} = 0$

despejando el término al cuadrado :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

dividiendo por a :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

aplicando una raíz cuadrada :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

despejando x :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

⇡ subir

Fórmula de solución de ecuaciones de segundo grado y tipos de soluciones

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$ *donde discriminante* $\triangle = b^2 - 4ac$

$$\text{Si } \Delta = \begin{cases} > 0 \text{ tiene 2 raíces } \mathbb{R} \quad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ = 0 \text{ tiene una raíz } \mathbb{R} \quad x = -\frac{b}{2a} \\ < 0 \text{ tiene raíces } \mathbb{C} \text{ conjugadas } \quad x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} i;\ x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} i \end{cases}$$

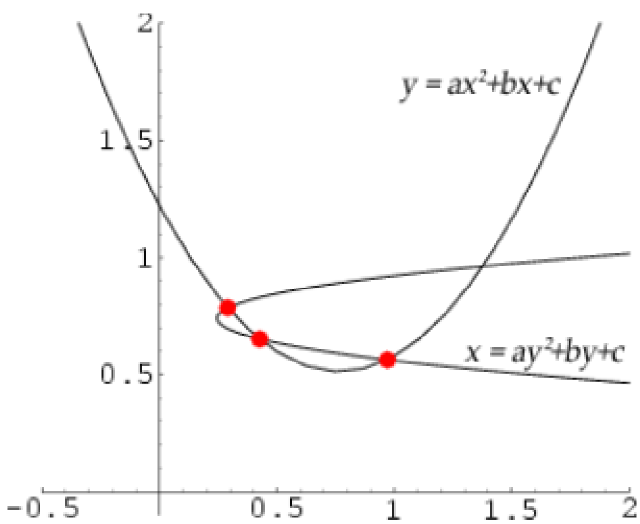
↑ subir

Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)

Se genera al desarrollar el determinante:

Eje de simetría // al eje Y $\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = ax^2 + bx + c$

Eje de simetría // al eje X $\begin{vmatrix} y^2 & x & y & 1 \\ y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = ay^2 + by + c$

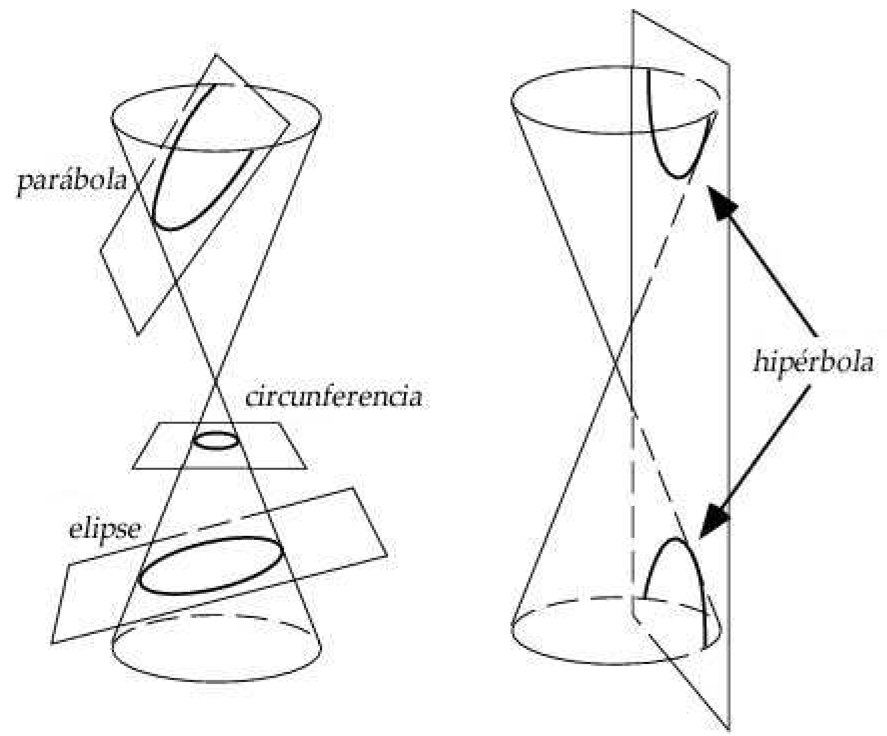


- *NOTA: Para una explicación más detallada vea el formulario de Determinantes*

↑ subir

Secciones Cónicas

Son las curvas obtenidas al cortar la superficie cónica con un plano en distintos ángulos :



Parábola : LG de todos aquellos puntos tales que equidistan de un punto fijo llamado Foco y de una recta llamada Directriz.

Ejemplo :

Si la Directriz fuera $x = -p$ *y el Foco fuera* $c = (p,\ 0)$ *entonces la ecuación sería :*

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p| \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4\,px$$

subir

Elipse : LG de todos aquellos puntos tales que cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados Focos es siempre constante.

Ejemplo :

Si los focos estuvieran en el eje X a igual distancia del eje Y $F_1 = (-c,\ 0) \wedge F_2 = (c,\ 0)$ *y la suma de distancia fuera siempre* $2\,a$ *:*

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2\,a \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } b^2 + c^2 = a^2$$

⇡ subir

Circunferencia: LG de todos aquellos puntos tales que su distancia a un punto fijo llamado centro es constante.

Ejemplo:

Si el centro fuera el punto $(h,\ k)$ *y la distancia constante fuera* r *:*

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r \quad \Rightarrow \quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

⇡ subir

Hipérbola: LG de todos aquellos puntos tales que cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados Focos es siempre constante.

Ejemplo:

Si los focos estuvieran en el eje X a igual distancia del eje Y $F_1=(-c,\ 0) \wedge F_2=(c,\ 0)$ *y la diferencia de distancias fuera siempre* $2a$ *:*

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{donde } a^2+b^2=c^2$$

⇡ subir

Ecuación principal de una cónica en función de su excentricidad

$$(1-e^2)\,x^2+y^2-2\,px\,(1+e^2)+p^2\,(1-e^2)=0$$

• *NOTAS:*

$-\,p$ *: pto fijo en el eje X donde se ubica el foco.*

$-\,e$ *: excentricidad definida por la razón* $e=\dfrac{d\,(P,\ F)}{d\,(P,\ D)}$ *donde D : directriz* $\wedge$ *F : foco*

Clasificación de la cónicas según excentricidad

Si $e=0 \Rightarrow$ *Circunferencia*

Si $e=\dfrac{c}{a}<1 \Rightarrow$ *Elipse*

Si $e=1 \Rightarrow$ *Parábola*

Si $e=\dfrac{c}{a}>1 \Rightarrow$ *Hipérbola*

⇧ subir

Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos $(x_1, y_1)\ (x_2, y_2)\ (x_3, y_3)$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{donde } r: \text{radio}, \ \text{centro} = (h, k)$$

$$h=\frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2 & y_2-y_1 \\ x_3^2+y_3^2-x_1^2-y_1^2 & y_3-y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}}$$

$$k=\frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2 \\ x_3-x_1 & x_3^2+y_3^2-x_1^2-y_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}}$$

$$r=\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2}$$

⇧ subir

Area de un triángulo con vértices $(x_1, y_1)\ (x_2, y_2)\ (x_3, y_3)$

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-(x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2)}{2}$$

Definiciones

$$sen(\theta)=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

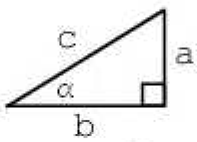
$$cos(\theta)=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$tan(\theta)=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

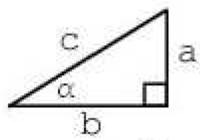
$$cot(\theta)=\frac{1}{tan(\theta)}=\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} \quad \forall\ \theta \in \mathbb{R}-\{k\pi\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$sec(\theta) = \frac{1}{cos(\theta)} \; \forall \; \theta \in \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\} \; con \; k \in \mathbb{Z}$$

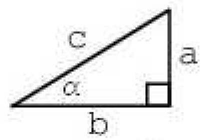
$$cosec(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)} \; \forall \; \theta \in \mathbb{R} - \{ k\pi \} \; con \; k \in \mathbb{Z}$$



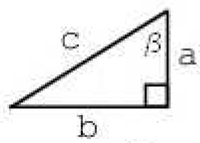
$sen\,\alpha = \frac{a}{c}$



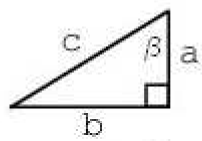
$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$



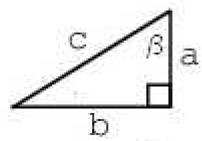
$tan\,\alpha = \frac{a}{b}$



$sen\,\beta = \frac{b}{c}$



$cos\,\beta = \frac{a}{c}$



$tan\,\beta = \frac{b}{a}$

• *NOTA: Como en un triángulo rectángulo se cumple a la vez:* $sen(\alpha) = cos(\beta)$, $\alpha + \beta = 90°$

con α *y* β *ángulos opuestos a los catetos.*

$$\beta = 90° - \alpha \;\therefore\; sen(\alpha) = cos(90° - \alpha) \;\Rightarrow\; cos(90° - x) = sen(x)$$

$$\alpha = 90° - \beta \;\therefore\; sen(90° - \beta) = cos(\beta) \;\Rightarrow\; sen(90° - x) = cos(x)$$

↑ subir

Valores Notables

Angulos → Funciones ↓	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
sen (x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	−1	0
cos (x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	1
tan (x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No ∃	$-\sqrt{3}$	0	No ∃	0
cosec (x)	No ∃	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	No ∃	−1	No ∃
sec (x)	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	No ∃	−2	1	No ∃	1
cot (x)	No ∃	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	No ∃	0	No ∃

• *NOTA: El símbolo* No $\exists$ *significa No existe o No definida.*

Otra forma rápida para calcular valores en el primer cuadrante es:

Angulos → Funciones ↓	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$sen(x)$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
$cos(x)$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$

Ejemplo:

Si necesitamos $\tan(60°) = \dfrac{sen(60°)}{cos(60°)}$ *observamos la 4 ta columna 60 ° y por lo tanto*

$$\tan(60°) = \frac{sen(60°)}{cos(60°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{1}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{3}$$

Para triángulos donde $a : b : c = 3 : 4 : 5$ *(a, b: catetos c: hipotenusa) se tiene que*

$$\Rightarrow sen(37°) \simeq \frac{3}{5} \quad cos(37°) \simeq \frac{4}{5} \quad tan(37°) \simeq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow sen(53°) \simeq \frac{4}{5} \quad cos(53°) \simeq \frac{3}{5} \quad tan(53°) \simeq \frac{4}{3}$$

• *NOTA: Para convertir a radianes se plantea la proporción:* $\dfrac{x_{rad}}{\pi} = \dfrac{\theta^{°}}{180}$

subir

Signos en cada cuadrante: $\begin{matrix} II & I \\ III & IV \end{matrix}$

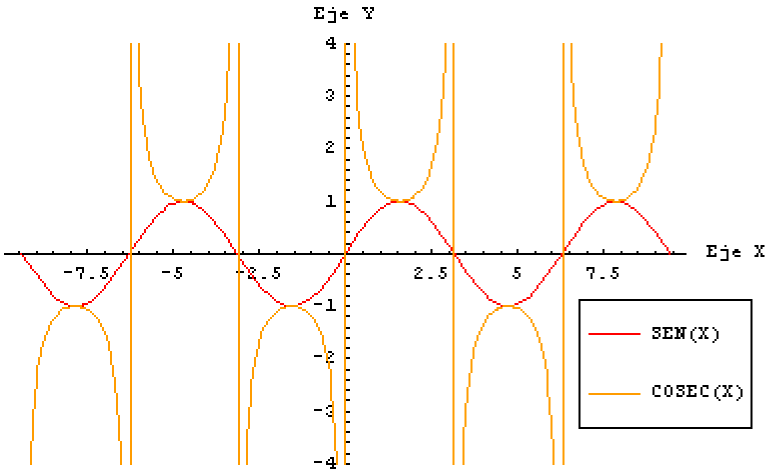
$sen(x); cosec(x):$ $\begin{matrix} + & + \\ - & - \end{matrix}$

$cos(x); sec(x):$ $\begin{matrix} - & + \\ - & + \end{matrix}$

$tan(x); cot(x):$ $\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}$

subir

$$Gráfica\ de\ y = sen\ (x);\ y = cosec\ (x) = \frac{1}{sen\ (x)}$$



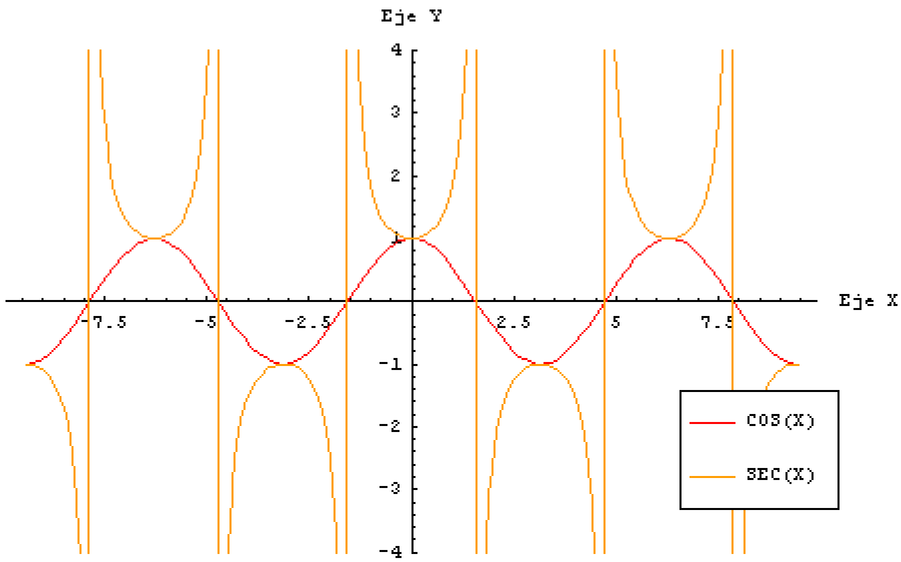
•*NOTA*: *Las líneas verticales naranja corresponden a las Asíntotas de la función* $y = cosec\ (x)$ *en los puntos donde se indetermina* : $x = k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$

$$Periodo\ función\ sen\ (x) = T = 2\pi \Rightarrow sen\ (x + 2\pi k) = sen\ (x)\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

$$Periodo\ función\ cosec\ (x) = T = 2\pi \Rightarrow cosec\ (x + 2\pi k) = cosec\ (x)\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

↑ subir

$$Gráfica\ de\ y = cos\ (x);\ y = sec\ (x) = \frac{1}{cos\ (x)}$$



•*NOTA: Las líneas verticales naranja corresponden a las Asíntotas de la función*

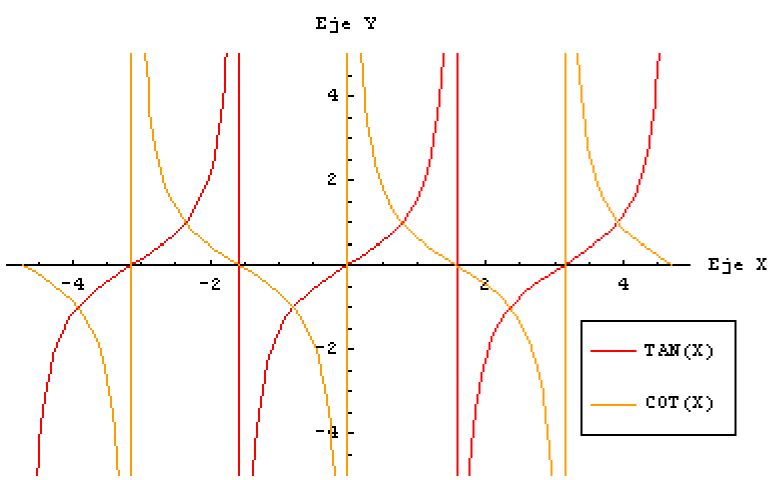
$$y = \sec(x) \text{ en los puntos donde se indetermina} : x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Periodo función } \cos(x) = T = 2\pi \Rightarrow \cos(x + 2\pi k) = \cos(x) \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Periodo función } \sec(x) = T = 2\pi \Rightarrow \sec(x + 2\pi k) = \sec(x) \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

⇧ subir

Gráfica de $y = \tan(x)$; $y = \cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$



•NOTA: Las líneas verticales rojas corresponden a las Asíntotas de la función

$y = \tan(x)$ en los puntos donde se indetermina : $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Las líneas verticales naranja corresponden a las Asíntotas de la función

$y = \cot(x)$ en los puntos donde se indetermina : $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Periodo función $\tan(x) = T = \pi \Rightarrow \tan(x+\pi k) = \tan(x)\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Periodo función $\cot(x) = T = \pi \Rightarrow \cot(x+\pi k) = \cot(x)\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

↑ subir

Paridad

$sen(-x) = -sen(x)$ (función impar)

$\cos(-x) = \cos(x)$ (función par)

$\tan(-x) = -\tan(x)$ (función impar)

↑ subir

Suma y Resta de ángulos

$sen(x \pm y) = sen(x)\cdot\cos(y) \pm sen(y)\cdot\cos(x)$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cdot\cos(y) \mp sen(y)\cdot sen(x)$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\cdot\tan(y)}$$

↑ subir

Angulos complementarios

$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen(x)$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$

$cosec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x)$

$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosec(x)$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$

⇡ subir

Angulos suplementarios

$sen\,(\pi - x) = -sen\,(x)$

$cos\,(\pi - x) = -cos\,(x)$

$tan\,(\pi - x) = tan\,(x)$

$cosec\,(\pi - x) = -cosec\,(x)$

$sec\,(\pi - x) = -sec\,(x)$

$cot\,(\pi - x) = cot\,(x)$

⇡ subir

Identidades Pitagóricas

$cos^2\,(x) + sen^2\,(x) = 1$

$1 + tan^2\,(x) = sec^2\,(x)$

$1 + cot^2\,(x) = cosec^2\,(x)$

⇡ subir

Angulos dobles

$$sen\,(2\,x) = 2\,sen\,(x) \cdot cos\,(x) = \frac{2\,tan\,(x)}{1 + tan^2\,(x)}$$

$$cos\,(2\,x) = cos^2\,(x) - sen^2\,(x) = 1 - 2\,sen^2\,(x) = 2\,cos^2\,(x) - 1$$

$$tan\,(2\,x) = \frac{2\,tan\,(x)}{1 - tan^2\,(x)}$$

$$cot\,(2\,x) = \frac{cot^2\,(x) - 1}{2\,cot\,(x)}$$

⇡ subir

Angulos medios

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,(x)}{2}}$$

$$cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\,(x)}{2}}$$

$$tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,(x)}{1 + cos\,(x)}} = \frac{sen\,(x)}{1 + cos\,(x)} = \frac{1 - cos\,(x)}{sen\,(x)} = cosec\,(x) - cot\,(x)$$

↑ subir

Angulos triples

$$sen\,(3\,x) = 3\,sen\,(x) - 4\,sen^3\,(x)$$

$$cos\,(3\,x) = 4\,cos^3\,(x) - 3\,cos\,(x)$$

↑ subir

Sumas a Productos

$$sen\,(x) + sen\,(y) = 2\,sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$sen\,(x) - sen\,(y) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$cos\,(x) + cos\,(y) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$cos\,(x) - cos\,(y) = -2\,sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$tan\,(x) \pm tan\,(y) = -\frac{sen\,(x \pm y)}{cos\,(x)\cdot cos\,(y)}$$

↑ subir

Productos a Suma

$$sen\,(x)\,sen\,(y) = \frac{1}{2}\,(cos\,(x-y) - cos\,(x+y))$$

$$cos\,(x)\,cos\,(y) = \frac{1}{2}\,(cos\,(x-y) + cos\,(x+y))$$

$$sen(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(sen(x-y)+sen(x+y))$$

⇡ subir

funciones en términos de:	$sen(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$sen(x) =$	–	$\pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$	$\frac{\tan(x)}{\pm\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
$\cos(x) =$	$\pm\sqrt{1-sen^2(x)}$	–	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
$\tan(x) =$	$\frac{sen(x)}{\pm\sqrt{1-sen^2(x)}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}$	–

⇡ subir

funciones en términos de:	$\cot(x)$	$\sec(x)$	$cosec(x)$
$sen(x) =$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2(x)}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2(x)-1}}{\sec(x)}$	$\frac{1}{cosec(x)}$
$\cos(x) =$	$\frac{\cot(x)}{\pm\sqrt{1+\cot^2(x)}}$	$\frac{1}{\sec(x)}$	$\frac{\pm\sqrt{cosec^2(x)-1}}{cosec(x)}$
$\tan(x) =$	$\frac{1}{\tan(x)}$	$\pm\sqrt{\sec^2(x)-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{cosec^2(x)-1}}$

⇡ subir

Trigonométricas inversas

$$arcsen(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x) \quad \forall\ x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(x) = arcsen\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - arcsen(x) \quad \forall\ x \in [-1, 1]$$

$$\arctan(x) = arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - arccot(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

⇮ subir

Sinusoidal

Se define como $y = A\,sen\,(\omega x) + B\cos\,(\omega x)$

Amplitud: Máx altura respecto al eje X que alcanza la onda.

$$Amplitud = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Periodo: Longitud de Intervalo donde se repite el comportamiento gráfico.

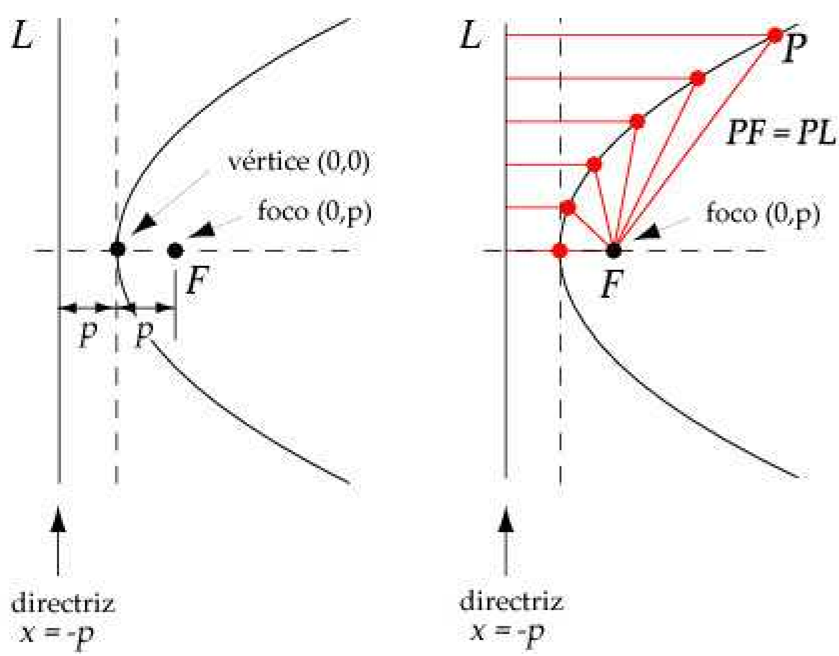
$$Periodo = T = \frac{2\pi}{\omega}$$

∡desface: corrimiento respecto del eje Y de la primera intersección con el eje X.

$$\measuredangle desface = \frac{|\phi|}{\omega} \quad donde \tan(\phi) = \frac{B}{A}$$

Definición

Una parábola es el Lugar Geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta llamada directriz



Ecuación Cartesiana

Parábola eje de simetría paralelo al eje Y :

$$(y-k)^2 = 4\,p\,(x-h)$$

Parábola eje de simetría paralelo al eje X :

$$(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k) \quad o\ bien$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde p : distancia entre foco y vértice

Demostración

Considerando el dibujo las distancias al foco y a la recta se igualan:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

elevando al cuadrado :

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

desarrollando los cuadrados de binomio :

$$x^2 - 2\,px + p^2 + y^2 = x^2 + 2\,px + y^2$$

reduciendo términos :

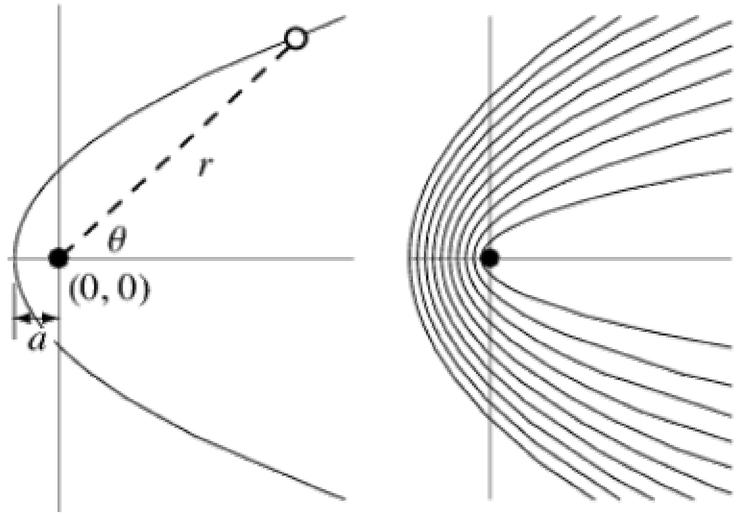
Si el vértice fuera el punto (h, k) la ecuación sería :

$$(y-k)^2 = 4\,p\,(x-h)$$

⇡ subir

Ecuación Polar

En coordenadas polares, la ecuación de una parábola con parámetro a y centro en el origen está dada por :



$$r = -\frac{2\,a}{1 + \cos(\Theta)}$$

donde a : distancia entre origen y vértice

⇧ subir

Ecuación Paramétrica

Una parábola con eje X como eje de simetría y centro (0, 0) se puede definir como :

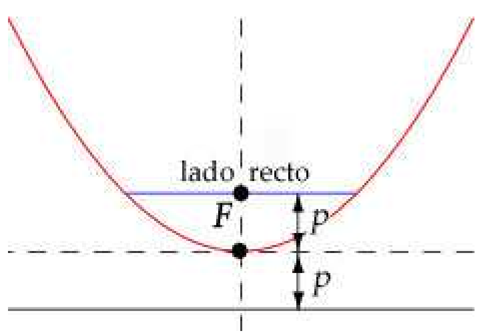
$x = pt^2$; $y = 2\,pt$

donde p : distancia entre foco y vértice

⇧ subir

Lado recto

El lado recto (4 p) es la cuerda paralela a la directriz que pasa por el foco.



⇡ subir

Parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$

$$(x-h)^2 = 4\,p\,(y-k) \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c$$

$-$ Si $a > 0$ parábola viene de arriba (convexa) y el vértice es un mínimo

Si $a < 0$ viene de abajo (cóncava) y el vértice es un máximo

$-$ Eje de simetría $x = -\dfrac{b}{2\,a}$ (viene de donde la pendiente es cero: $y' = 2\,ax + b = 0$)

$-$ Vértice a partir de $a,\ b,\ c$: $(h,\ k) = \left(-\dfrac{b}{2\,a},\ \dfrac{4\,ac - b^2}{4\,a}\right)$

$-$ Completar cuadrados $y = a\,(x-h)^2 + k = a\left(x + \dfrac{b}{2\,a}\right)^2 + \dfrac{4\,ac - b^2}{4\,a}$

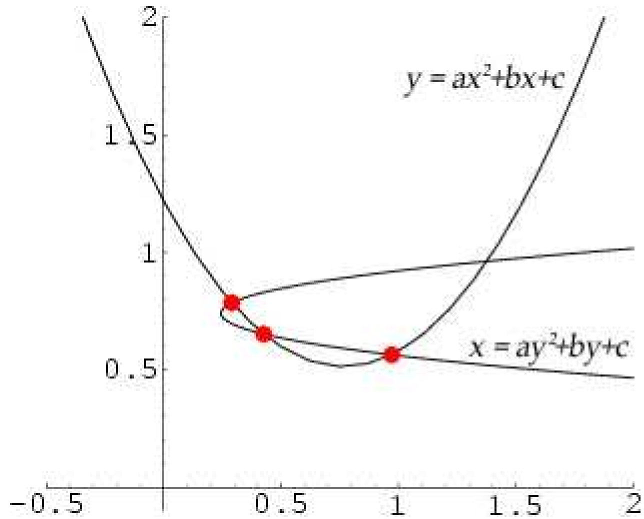
⇡ subir

La ecuación de la parábola que pasa por tres puntos $(x_1,\ y_1)\ (x_2,\ y_2)\ (x_3,\ y_3)$

Se genera al desarrollar el determinante:

Eje de simetría // al eje Y $\quad \begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = ax^2 + bx + c$

Eje de simetría // al eje X $\quad \begin{vmatrix} y^2 & x & y & 1 \\ y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = ay^2 + by + c$



⇧ subir

Ecuación cuadrática o raíces de la parábola $y = ax^2 + bx + c = 0$

Como $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$

despejando el término al cuadrado :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

dividiendo por a :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

aplicando una raíz cuadrada :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

por lo tanto nos quedan 2 raíces :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ;\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• *NOTA:* Al subradical $\triangle = b^2 - 4\,ac$ se le llama discriminante.

Propiedades de la raíces

Suma: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Producto: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Diferencia: $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{a} = \dfrac{\sqrt{\triangle}}{a}$

Suma de los recíprocos: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{b}{c}$

Diferencia de los recíprocos: $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{c} = \dfrac{\sqrt{\triangle}}{c}$

Suma de cuadrados: $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{b^2 - 2\,a\,c}{a^2} = \dfrac{\triangle + 2\,ac}{a^2}$

Resta de cuadrados: $x_1^2 - x_2^2 = -\dfrac{b\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{a^2} = -\dfrac{b\sqrt{\triangle}}{a^2}$

Cuociente: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}} = \dfrac{b + \sqrt{\triangle}}{b - \sqrt{\triangle}} = \dfrac{b^2 + 2\,b\sqrt{\triangle} + \triangle}{4\,a\,c}$

Naturaleza de la raíces

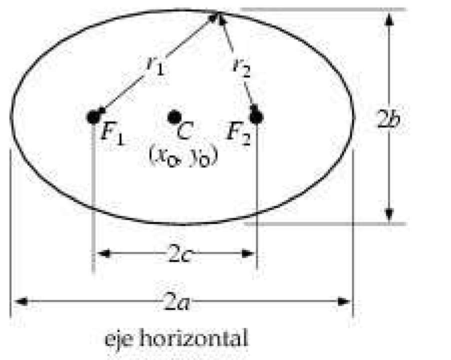
Si $\triangle = b^2 - 4\,ac$ entonces:

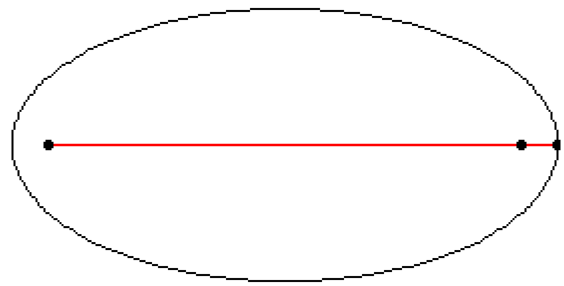
$$\triangle = \begin{cases} > 0 \quad \text{tiene 2 raíces } \mathbb{R} \quad x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2\,a};\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2\,a} \\ \quad\quad (\text{si } \triangle \text{ es cuadrado perfecto tiene 2 raíces Racionales}) \\ = 0 \quad \text{tiene una raíz } \mathbb{R} \quad x = -\dfrac{b}{2\,a} \\ < 0 \quad \text{tiene raíces } \mathbb{C} \text{ conjugadas} \quad z_1 = -\dfrac{b}{2\,a} + \dfrac{\sqrt{\triangle}}{2\,a}\,i;\ z_2 = -\dfrac{b}{2\,a} - \dfrac{\sqrt{\triangle}}{2\,a}\,i \end{cases}$$

Definición

Una elipse es el Lugar Geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias r_1 y r_2 a dos puntos F_1 y F_2 llamados focos es constante:

$r_1 + r_2 = cte$





Ecuación Cartesiana

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

donde a: semieje horizontal, b: semieje vertical y centro (x_0, y_0)

Demostración

Considerando los parámetros expresados en el dibujo, centrando el punto C en el origen y coincidiendo el eje mayor con el eje X y el eje menor con el eje Y:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

La expresión 2 a corresponde a la constante pues la suma de las longitudes de las lineas rojas corresponde al eje mayor. Luego pasamos una raíz a un lado para elevar al cuadrado más cómodamente:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

desarrollando:

$$x^2 + 2\,cx + c^2 + y^2 = 4\,a^2 - 4\,a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2\,cx + c^2 + y^2$$

reduciendo :

$$4\,a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4\,a^2 - 4\,cx$$

elevando nuevamente al cuadrado :

$$a^2\,((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2\,a^2\,cx + c^2\,x^2$$

$$a^2\,(x^2 - 2\,cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2\,a^2\,cx + c^2\,x^2$$

$$a^2\,x^2 - 2\,a^2\,cx + a^2\,c^2 + a^2\,y^2 = a^4 - 2\,a^2\,cx + c^2\,x^2$$

eliminando el término $x^2 - 2\,a^2\,cx$ *:*

$$a^2\,x^2 + a^2\,c^2 + a^2\,y^2 = a^4 + c^2\,x^2$$

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^4 - a^2\,c^2$$

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

definiendo una nueva constante $b^2 = a^2 - c^2$ *:*

$$b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2$$

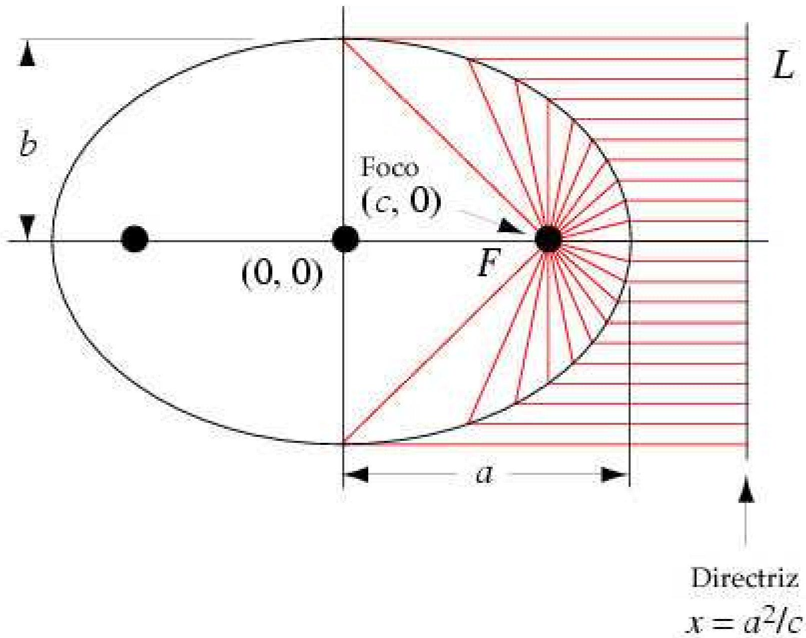
dividiendo por $a^2\,b^2$ *:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

⇧ subir

Otra definición

La elipse también puede ser definida por todos aquellos puntos cuya distancia desde un foco es proporcional a la distancia horizontal a una linea vertical llamada Directriz.



Estableciendo que r es la proporción y d la distancia desde el centro hasta la recta directriz entonces se cumple que:

$$r = \frac{a-c}{d-a} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{d}$$

resolviendo:

$$d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a^2}{b}$$

$$r = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{c}{a}$$

↑ subir

Ecuación Polar

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos(\Theta)}$$

donde a: semieje horizontal, $e = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ *(excentricidad)*

Ecuación Paramétrica

La elipse se puede definir como :

$x = a\cos(\Theta)$

$y = b\,\mathrm{sen}(\Theta) \quad \text{con} \;\; 0 \le \Theta \le 2\pi$

⇡ subir

Perímetro

Mediante la serie Gauss – Kummer :

$$P = \pi(a+b)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}^2 h^n = \pi(a+b)\left(1 + \frac{1}{4}h + \frac{1}{64}h^2 + \frac{1}{256}h^3 + \ldots\right)$$

donde a *: semieje horizontal,* b *: semieje vertical y* $h = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$

⇡ subir

Area

$A = \pi\, ab$

Demostración

El área puede ser encontrada mediante integración directa:

$$A = \int_{-a}^{a}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$$

$$A = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$A = \frac{4b}{a}\left\{\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsen\left[\frac{x}{a}\right]\right)\right\}_0^a = \pi\, ab$$

donde a *: semieje horizontal,* b *: semieje vertical*

⇡ subir

Excentricidad

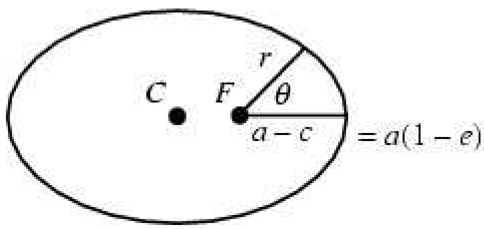
Se define en general para las secciones cónicas como la razón:

$$e = \frac{distancia\ (Punto - Foco)}{distancia\ (Punto - Directriz)} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}$$

donde $0 \le e < 1$ *para el caso de una elipse*

$$\Rightarrow\ b = a\sqrt{1 - e^2}\ ;\ c = ae$$

Se puede interpretar la excentricidad como la posición de un foco respecto del semieje mayor: $F = a\,(1 - e)$

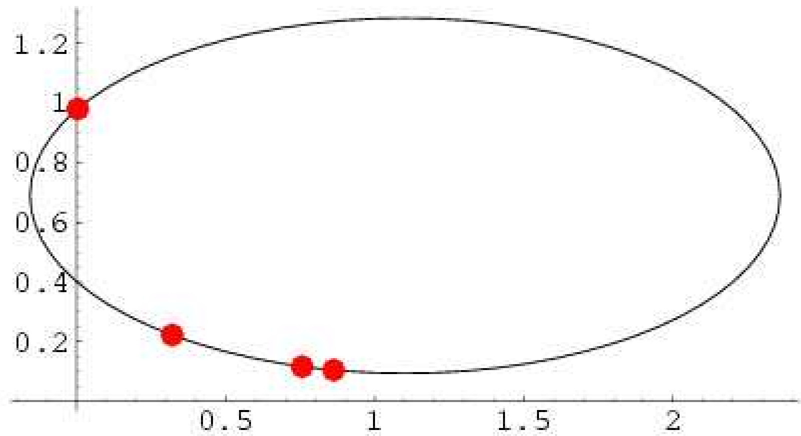


⇡ subir

Ecuación de la elipse que pasa por 4 puntos

Sean los puntos $(x_1, y_1)\,(x_2, y_2)\,(x_3, y_3)$ *y* (x_4, y_4),
entonces la ecuación se genera al desarrollar el determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Productos Notables

Suma por su diferencia

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$$

Cuadrado de binomio

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,ab + b^2$$

Cubo de binomio

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3\,a^2 b + 3\,ab^2 \pm b^3$$

↑ subir

Binomio n – ésimo

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \qquad (\textit{Binomio de Newton})$$

• *NOTA:*

$$-\,C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \qquad (\textit{coeficientes binomiales})$$

$-\,C_k^n$ *también salen del Triangulo de Pascal donde n es el exponente del binomio*

n													
							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		15		1

Observación : cada coeficiente es el resultante de la suma de los inmediatamente arriba !

Ejemplo :

$(a+b)^4$ *vemos la 4 ta fila : 1, 4, 6, 4, 1 con 5 términos entonces :*

$(a+b)^4 = 1\,a^4\,b^0 + 4\,a^3\,b^1 + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a^1\,b^3 + 1\,a^0\,b^4$

$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,ab^3 + b^4$

subir

Producto de binomios con término en común

$(x+a)\,(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$

Trinomio al cuadrado

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,ab + 2\,bc + 2\,ac$

subir

Factorizaciones

Diferencia de cuadrados

$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$

Diferencia de cubos

$a^3 - b^3 = (a-b)\,(a^2 + ab + b^2)$

Suma de cubos

$a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - ab + b^2)$

⇡ subir

Diferencia de potencias n – ésimas

Generalizando la diferencia de potencias:

$$\rightarrow a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$$

$$\rightarrow a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^3 b^2 + a^2 b + b^4)$$

$$\rightarrow a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = A^3 - B^3 \quad donde\ A = a^2 \quad B = b^2$$

$$como\ A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$\Rightarrow (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)\left((a^2)^2 - a^2 b^2 + (b^2)^2\right) = (a - b)(a + b)(a^4 - a^2 b^2 + b^4)$$

$$\therefore a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5)$$

entonces generalizando llegamos a que:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + a^{n-i} b^{i-1} + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

⇡ subir

Deducción de fórmula de $\sum x^k$

A partir de lo anterior si $a = x$; $b = 1$ *tenemos:*

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

generalizando...

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

La fórmula anterior da origen a la suma de una Progresión Geométrica:

$$\Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k} = \frac{x^{n}-1}{x-1}$$

Trinomio cuadrático

$$x^2 + Ax + B = (x + x_1)(x + x_2) \quad donde\ A = x_1 + x_2 \quad B = x_1 \cdot x_2$$

subir

Polinomio cuadrático y ecuación de 2 do grado

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$donde\ x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad raíces\ de\ la\ ecuación\ ax^2 + bx + c = 0$$

▫ *Propiedades de la raíces:* $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

Completar Cuadrados

$$ax^2 + bx + c = a(x + h)^2 + k \qquad donde\ h = -\frac{b}{2a};\ k = \frac{4ac - b^2}{4a};$$

• *NOTA:* (h, k) *vértice de la parábola* $y = ax^2 + bx + c$

Potencias

Definición

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (n\ veces) \quad n \in \mathbb{N}$$

Cálculos básicos

$1^n = 1$ $\qquad$ $a^0 = 1$ $\qquad$ $a^1 = a$

Tabla de potencias 2, 3, 4 y 5 de los números del 1 al 30

n	n^2	n^3	n^4	n^5

1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049
10	100	1000	10000	100000
11	121	1331	14641	161051
12	144	1728	20736	248832
13	169	2197	28561	371293
14	196	2744	38416	537824
15	225	3375	50625	759375
16	256	4096	65536	1048576
17	289	4913	83521	1419857
18	324	5832	104976	1889568
19	361	6859	130321	2476099
20	400	8000	160000	3200000
21	441	9261	194481	4084101
22	484	10648	234256	5153632
23	529	12167	279841	6436343
24	576	13824	331776	7962624
25	625	15625	390625	9765625
26	676	17576	456976	11881376
27	729	19683	531441	14348907
28	784	21952	614656	17210368
29	841	24389	707281	20511149
30	900	27000	810000	24300000

⇡ subir

Propiedades de las Potencias

Potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m}$$

Potencias de base negativa (con $a > 0$)

– Si el exponente es par entonces la potencia será siempre positiva :

$$(-a)^{2n} > 0$$

– Si el exponente es impar y la base negativa entonces el resultado será siempre negativa :

$(-a)^{2n+1} < 0$

↑ subir

Potencias de igual exponente

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Exponente negativo

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Potencia elevada a un exponente

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Exponente al infinito (a^n con $n \to \infty$)

$a^n \to 0 \quad si \ |a| < 1$
$a^n \to \infty \quad si \ |a| > 1$

↑ subir

Raíces

Definición

$\sqrt[n]{a}$ *equivale a un número tal (raíz) que multiplicado n veces se obtenga el valor " a ":*

$r = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot r \cdot r \cdot r \cdots r = a$ *(n veces)*

Raíces en notación de potencias

$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ *(en este caso la base es a, y el índice es 2)*

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ *(en este caso la base es a, y el índice es n)*

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ *(en este caso la base es a^n, y el índice es m)*

Raíces de igual índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

⇡ subir

Producto de raíces de igual base e índice

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^2}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \cdot \cdot \sqrt[n]{a} = a \quad (n \text{ veces})$$

Raíces de igual base y distinto índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \quad (\text{se suman los índices})$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} \quad (\text{se restan los índices})$$

⇡ subir

Restricción para raíces de índice par

Debido a la ley de los signos $(+ \cdot + = + \text{ o bien } - \cdot - = +)$ *se tiene:*

$$\sqrt{a} \ \exists \text{ si } a \geq 0$$

$$\sqrt[2n]{a} \ \exists \text{ si } a \geq 0$$

$$\sqrt{(-a)} \text{ NO EXISTE si } a > 0 \text{ y equivale al número complejo } z = \sqrt{a}\, i$$

Potencia de una raíz

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a^m}\right) = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

⇡ subir

Potencia en función de la exponencial

Si $y = a^b$

se aplica el logaritmo $\Rightarrow$ $ln(y) = b \cdot ln(a)$

se aplica la exponencial $\Rightarrow$ $y = e^{b\,ln(a)}$ $\therefore$ toda potencia $a^b = e^{b\,ln(a)}$

• NOTA: Lo anterior es conveniente en caso de límites indeterminados de la forma 1^{∞}

⇡ subir

Aproximaciones al valor de una raíz

Raíz cuadrada

$$\sqrt{a^2+b} \approx \frac{b}{2a} + a$$

💡 Ejemplo:

$$\sqrt{85} = \sqrt{81+4} = \sqrt{9^2+4} \approx \frac{4}{2\cdot 9} + 9 = \frac{83}{9} = 9.\bar{2}$$

Raíz e-nésima

$$\sqrt[n]{a^n+b} \approx \frac{b}{n\cdot a^{n-1}} + a$$

💡 Ejemplo:

$$\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{125-25} = \sqrt[3]{5^3-25} \approx \frac{-25}{3\cdot 5^{3-1}} + 5 = \frac{-5^2}{3\cdot 5^2} + 5 = -\frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3} = 4.\bar{6}$$

⇡ subir

Recursividad para aproximar valor de $\sqrt{2}$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + 1$$

Si $a_n = \sqrt{2}$ *depende del último valor calculado* $\left(\sqrt{2}\right)$ *en la aproximación* a_{n-1} *:*

$$a_n = \frac{1}{a_{n-1} + 1} + 1$$

Supongamos que $a_0 = 2$ *(pues es el valor máximo que podría tener* $\sqrt{2}$*)*

n	a_n *(fracción)*	a_n *(decimal)*
1	$\frac{4}{3}$	1.3333333333333333333
2	$\frac{10}{7}$	1.4285714285714285714
3	$\frac{24}{17}$	1.4117647058823529412
4	$\frac{58}{41}$	1.4146341463414634146
5	$\frac{140}{99}$	1.4141414141414141414
6	$\frac{338}{239}$	1.4142259414225941423
7	$\frac{816}{577}$	1.4142114384748700173
8	$\frac{1970}{1393}$	1.4142139267767408471
9	$\frac{4756}{3363}$	1.4142134998513232233
10	$\frac{11482}{8119}$	1.4142135731001354847
11	$\frac{27720}{19601}$	1.4142135605326258864
12	$\frac{66922}{47321}$	1.4142135626888696350
13	$\frac{161564}{114243}$	1.4142135623189166951
14	$\frac{390050}{275807}$	1.4142135623823905847
15	$\frac{941664}{665857}$	1.4142135623715001870
16	$\frac{2273378}{1607521}$	1.4142135623733686838
17	$\frac{5488420}{3880899}$	1.4142135623730481005
18	$\frac{13250218}{9369319}$	1.4142135623731031039
19	$\frac{31988856}{22619537}$	1.4142135623730936668
20	$\frac{77227930}{54608393}$	1.4142135623730952859

Sumatoria

Linealidad

$$\sum a \cdot f(k) + b \cdot g(k) = a \sum f(k) + b \sum g(k)$$

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{m-1} f(k)$$

Fórmulas de cálculo

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$$

↑ subir

Ejemplo:

$-$ ¿Cómo obtener $\sum_{k=1}^{n} k^p$?

Se plantea $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ conociendo a priori las fórmulas $\sum_{k=1}^{n} k^{p-1}$, $\sum_{k=1}^{n} k^{p-2}$, …

Deduzcamos $\sum_{k=1}^{n} k^2$ *(en este caso* $p = 2$*) :*

desarrollando $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3$ *(telescópica) :*

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + \ldots + n^3 - (n-1)^3 + (n+1)^3 - n^3 = (n+1)^3 - 1$$

desarrollando el cubo de binomio y reduciendo en la sumatoria :

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + 3k + 1 = (n+1)^3 - 1$$

separando la sumatoria :

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1$$

despejando $\sum_{k=1}^{n} k^2$ *:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + n - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{3}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

⇡ subir

Suma telescópica

Es aquella que al expandir (reemplazar los valores de k y sumar) se anulan todos los términos excepto el primero y el último.

Ejemplo :

– Calcular $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

desarrollando:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

se anulan los términos $-\dfrac{1}{(k+1)!}$ *con* $\dfrac{1}{k!}$ *evaluado en* $k+1$, *quedando el 1° y último:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

⇡ subir

Sumas de elementos de Progresiones

$$\text{Si P.A.: } f(k) = a + d\,(k-1) \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}\, n\,(2a + d\,(n-1))$$

$$\text{Si P.G.: } f(k) = a \cdot r^{k-1} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{a\,(1-r^{n})}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

⇡ subir

Sumas de combinatorias

Suma de los coeficientes binomiales o de una fila del triángulo de Pascal:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

• *NOTA: Coeficiente binomial se define como* $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

⇡ subir

Productoria

Propiedades fundamentales

$$\prod_{k=1}^{n} f(k)\cdot g(k) = \left(\prod_{k=1}^{n} f(k)\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} g(k)\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{g(k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} f(k)}{\prod_{k=1}^{n} g(k)}$$

Definición de factorial

Es el producto de números consecutivos desde 1 hasta n:

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n = n!$$

▫ *Propiedades:*

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \quad\Rightarrow\quad \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

$$\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n \quad \text{con } n > k$$

↑ subir

Fórmulas de cálculo

$$\prod_{k=1}^{n} a = a^{n} \quad (a = \text{constante})$$

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

$$\prod_{k=1}^{n} (k+p) = \frac{(n+p)!}{p!}$$

$$\prod_{k=m}^{n} k = \frac{n!}{(m-1)!}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{2^{n}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \quad \text{donde } \Gamma(n) \text{ es Función Gamma}$$

⇡ subir

Relación entre suma y productoria

$$\sum_{k=1}^{n} log\,(f\,(k)) \;=\; log\left(\prod_{k=1}^{n} f\,(k)\right)$$

Naturaleza de los Números Complejos

Definición

Los números complejos nacen de la necesidad de generar una solución para la ecuación $x^2+1=0$, *lo que implicaría que* $x^2=-1$ (*lo cual no es cierto para los* $\mathbb{R}$, *pues* $x^2 \geq 0$)

Despejando se llega a $x=\pm\sqrt{-1}$ *creando una nueva entidad :*

$i=\sqrt{-1}$ *llamada Unidad Imaginaria*

Esta unidad es una extensión a las soluciones de ecuaciones de 2 do grado en el caso que el discriminante $\triangle = b^2-4\,ac<0$ *:*

$$ax^2+bx+c=0 \quad donde\; x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,ac}}{2\,a} = -\frac{b}{2\,a}\pm\frac{\sqrt{\triangle}}{2\,a}$$

Como se supone que $\triangle<0$ *entonces :*

$$x=-\frac{b}{2\,a}\pm\frac{\sqrt{-|\triangle|}}{2\,a} = -\frac{b}{2\,a}\pm\frac{\sqrt{|\triangle|}\,\sqrt{-1}}{2\,a} = -\frac{b}{2\,a}\pm\frac{\sqrt{|\triangle|}}{2\,a}\,i$$

Lo anterior se puede escribir como $A\pm Bi$ *lo que define a un Número Complejo !*

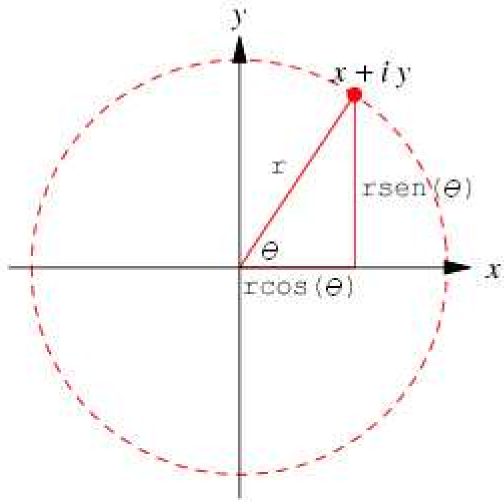
donde A*: Parte Real;* B*: Parte Imaginaria con* $A,\,B\in\mathbb{R}$

• *NOTA : El símbolo i lo introdujo Euler en 1777 en su ecuación* $e^{i\pi}=-1$

⇡ subir

Interpretación Geométrica

Se puede interpretar a un complejo $z = x + i\,y$ como un punto en el plano cartesiano, desde donde se deduce por trigonometría $x = r\cos(\Theta)$ $y = r\,sen(\Theta)$



Todo número complejo se puede escribir como:

$z = x + i\,y = r(\cos(\Theta) + i\,sen(\Theta)) = r\,e^{i\Theta}$

donde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ magnitud o módulo de z $\wedge$ $\Theta = \arg(z)$ = argumento de z

↑ subir

Potencias de la unidad imaginaria

$i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2$; $i^7 = i^3$

en general $i^n = i^r$ donde r es el resto de la división $n : 4$ o bien $(n \bmod 4)$

↑ subir

Operaciones entre Números Complejos

Básicamente se opera como términos algebraicos, evaluando las potencias de i:

Suma

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$

Resta

$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)\,i$

Producto

$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)\,i$

División

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-d^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}$$

⇧ subir

Potencias con exponentes naturales

Se desarrollan los binomios $a+bi$ y se evalúan las potencias de i:

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2\,abi + b^2 i^2 = (a^2-b^2) + (2\,ab)\,i$$

$$(a+bi)^3 = a^3 + 3\,a^2bi + 3\,ab^2i^2 + b^3 i^3 = (a^3 - 3\,ab^2) + (3\,a^2 b - b^3)\,i$$

$$\begin{aligned}(a+bi)^4 &= a^4 + 4\,a^3\,bi + 6\,a^2b^2i^2 + 4\,ab^3i^3 + b^4i^4 \\ &= (a^4 - 6\,a^2\,b^2 + b^4) + (4\,a^3\,b - 4\,a\,b^3)\,i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+bi)^5 &= a^5 + 5\,a^4\,bi + 10\,a^3\,b^2\,i^2 + 10\,a^2\,b^3\,i^3 + 5\,ab^4\,i^4 + b^5\,i^5 \\ &= (a^5 - 10\,a^3\,b^2 + 5\,ab^4) + (5\,a^4\,b - 10\,a^2\,b^3 + b^5)\,i\end{aligned}$$

en general... según el binomio de Newton:

$$(a+bi)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k\,i^k$$

• NOTA: $\binom{n}{k} = C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ *son los coeficientes binomiales*

Potencias con exponente complejo

$$(a+bi)^{c+di} = (a^2+b^2)^{\frac{c+di}{2}}\cdot e^{i(c+di)\Theta} \quad \text{donde } \tan(\Theta) = \frac{b}{a}$$

⇧ subir

Complejos conjugados

Si $z = a + bi$ *entonces se llamará conjugado a* $\bar{z} = a - bi$.

▫ *Propiedades*

$- \; z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$- \;$ *Parte Real* : $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$- \;$ *Parte Imaginaria* : $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = -\frac{1}{2} i (z - \bar{z}) = \frac{1}{2} i (\bar{z} - z)$

⇧ subir

Forma polar

Todo número complejo se puede expresar como

$z = a + bi = r e^{i\Theta} = r(\cos(\Theta) + i \operatorname{sen}(\Theta))$ *donde* $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\tan(\Theta) = \frac{b}{a}$

Teorema de Moivre y Potencia e-nésima

$z^n = (a + bi)^n = r^n(\cos(n\Theta) + i \operatorname{sen}(n\Theta)) = r^n e^{in\Theta}$

Raíz cuadrada

$z_0 = \sqrt{a + bi} = (a + bi)^{1/2} = (r e^{i\Theta})^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\Theta/2} = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\Theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\Theta\right)\right)$

pero también es raíz cuadrada :

$z_1 = \sqrt{a + bi} = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\Theta + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\Theta + \pi\right)\right)$ *pues* $z_1^{\,2} = a + bi$

⇧ subir

Raíz cúbica

$z_0 = \sqrt[3]{a + bi} = (a + bi)^{1/3} = (r e^{i\Theta})^{1/3} = \sqrt[3]{r}\, e^{i\Theta/3} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\Theta\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\Theta\right)\right)$

pero también son raíces cúbicas :

$$z_1 = \sqrt[3]{a+bi} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\Theta + \frac{2}{3}\pi\right) + i\,sen\left(\frac{1}{3}\Theta + \frac{2}{3}\pi\right)\right) \quad pues\ z_1^3 = a+bi$$

$$z_2 = \sqrt[3]{a+bi} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\Theta + \frac{4}{3}\pi\right) + i\,sen\left(\frac{1}{3}\Theta + \frac{4}{3}\pi\right)\right) \quad pues\ z_2^3 = a+bi$$

⇡ subir

Ecuación del tipo $z^n = z_0$ y raíz e-nésima

Si tenemos la ecuación $z^n = z_0 \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{z_0}$ *entonces :*

Como $z_0 = a + bi = r e^{i\Theta}$ *donde* $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\tan(\Theta) = \dfrac{b}{a}$

las n soluciones ω_k de la ecuación vienen dadas por :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\Theta + 2\pi k}{n}\right)} \quad con\ k = 0 \ldots n-1$$

NOTA: ω_k *con* $k = 0 \ldots n-1$ *son raíces e – nésimas de* z_0

Función Logaritmo

Definición

Si $a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b$ *ssi* $a > 0 \Rightarrow c > 0$

∴ *el logaritmo entrega el exponente (b) conociendo la base (a) y la potencia (c).*

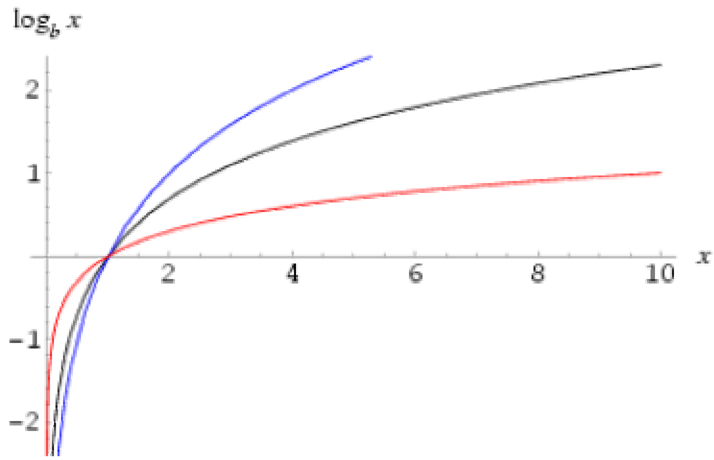
- *NOTA: Se usa log(x) para referirse a los logaritmos en general, pero si en el contexto se nombra ln(x) entonces se refiere específicamente al logaritmo natural con base e=2.71828... ∴ si se habla de log(x) en el mismo texto hace referencia al logaritmo de base 10.*

Definición integral

$$f(x) = \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Gráfica de la función logarítmica

La curva de color azul es logaritmo de base 2 de x, la de color negro es base e, la de color rojo es de base 10 ∴ a mayor base, mayor es a la izquierda de x=1 y menor a la derecha.



$Dom\ ln(x) = \mathbb{R}^+;\ Rec\ ln(x) = \mathbb{R};$

Siempre creciente↗ a tasas decrecientes (curva cóncava) con intercepto en eje X en x = 1.

⇡ subir

Propiedades del logaritmo

$log_a(1) = 0\ \ pues\ a^0 = 1$

$log_a(a) = 1\ \ pues\ a^1 = a$

$log(a) + log(b) = log(a \cdot b)$

$log(a) - log(b) = log\left(\frac{a}{b}\right)$

$log(a^b) = b \cdot log(a)$

$log\left(\sqrt[n]{a}\right) = log(a^{1/n}) = \frac{1}{n} log(a)$

$log\left(\sqrt[n]{a^m}\right) = log(a^{m/n}) = \frac{m}{n} log(a)$

• NOTA: A partir de la 3^{ra} propiedad permite transformar un producto, división, potencia o raíz en una suma, resta, o producto simple, lo que era muy aprovechado antes de la llegada de las calculadoras, ocupando tablas de logaritmo y antilogaritmo para llegar al resultado sin realizar demasiado trabajo.

⇡ subir

Cambio de base

$$\log_y(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(y)} = \frac{\log(x)}{\log(y)} = \frac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$$

• NOTA: Se puede llevar el logaritmo a una base conocida como 10 u otra a discreción.

Derivada

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad \left(\text{sin embargo para logaritmos no naturales}: \frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)\,x}\right)$$

Integral

$$\int \ln(x) = x\ln(x) - x + C$$

⇡ subir

Serie de Maclaurin

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \quad \text{si } -1 < x < 1$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \cdots \quad \text{si } -1 < x < 1$$

💡 Lo anterior nace de la igualdad algebraica:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$$

Si $n \to \infty$ tendrá un resultado finito si $|x| < 1$ pues $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ $\therefore$ nos queda:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \quad si \ -1 < x < 1 \qquad (1)$$

integrando :

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \ldots \quad si \ -1 < x < 1$$

Al sustituir x *por* $-x$ *en la igualdad* (1) :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots \quad si \ -1 < x < 1$$

luego al integrar :

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots \quad si \ -1 < x < 1$$

↑ subir

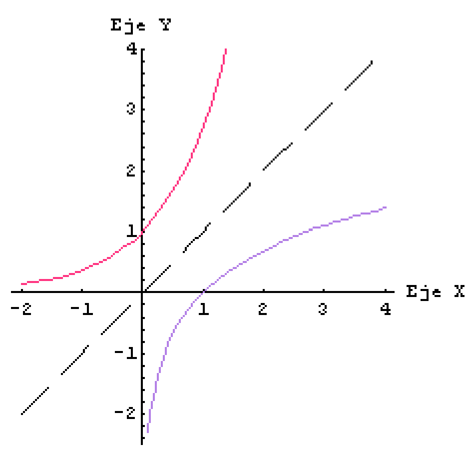
Función exponencial

Definición

$$f(x) = e^x \quad donde\ e = 2.71828182845904523536602874713526624977 57\ldots$$

Gráfica de la función exponencial y logaritmo

En siguiente gráfico se muestran la función exponencial (en rojo) y logaritmo en violeta y la recta $y = x$ *como un eje de simetría entre ambas curvas lo que demuestra gráficamente que se trata de funciones inversas.*



$Dom\, e^x = \mathbb{R};\ Rec\, e^x = \mathbb{R}^+;$

Siempre creciente↗ a tasas crecientes (curva roja convexa)
Intercepto con eje Y en y = 1.

⇡ subir

Número e

El número e es un número irracional (infinitas cifras decimales y no periódicas), descubierto por el matemático suizo Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII), que ha demostrado ser trascendente en el campo del análisis matemático.

El número e con 65 decimales es:

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ 95749\ 66967\ 6277$$

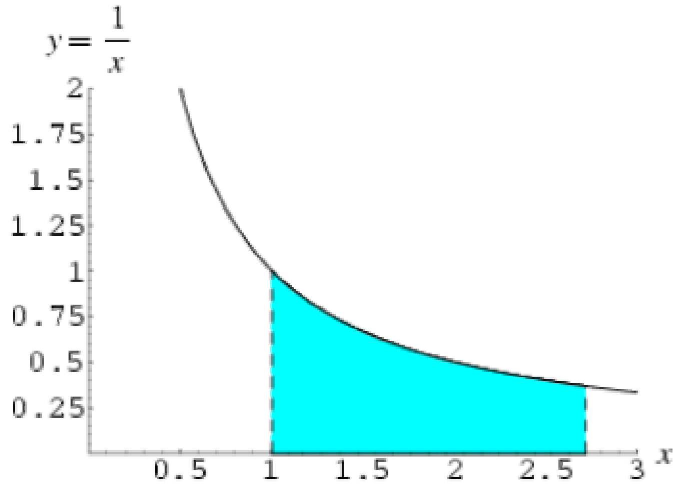
▫ *El número e se puede obtener como un límite infinito reflejando el crecimiento de un capital a interés compuesto donde el periodo (t) y la tasa (r) son inversamente proporcionales:*

$$C = C_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \quad \Rightarrow \quad e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

▫ *Tambien puede expresarse como una serie infinita:*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{(publicado por Isaac Newton 1669)}$$

▫ *El número e es el único número donde el área entre la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$ y el eje X, desde la vertical $x = 1$ hacia adelante es 1, o bien* $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t}\, dt = \ln(e) = 1$



▫ *Puede generarse como la fracción continua* $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}}}}}$$

▫ *El producto de Pippenger similar a las fórmulas de Wallis:*

$$\frac{e}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{4}{5}\ \frac{6}{5}\ \frac{6}{7}\ \frac{8}{7}\right)^{1/8} \cdots \frac{2^{2^{n-1}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2^{n-2}\right)\right)^4}{\pi \left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2^{n-1}\right)\right)^2} \cdots$$

▫ *También se obtiene indirectamente usando la relación recurrente:*

$$a_n = n\,(a_{n-1} + 1) \quad \text{con } a_1 = a^{-1} \quad \text{y calculando } \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + a_n^{-1}\right) \to e^a$$

▫ *Toda potencia* $y = a^b$ *se puede escribir como* $y = e^{b \ln(a)}$

⇧ subir

Propiedades

Función exponencial puede escribirse como $f(x) = \exp(x) = e^x$

Satisface las igualdades:

▫ $\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$

▫ $\exp(x-y) = e^{x-y} = e^{x}\cdot e^{-y} = \dfrac{e^{x}}{e^{y}} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

▫ $\exp(x) = e^{x} = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x)$ *donde* $\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x)$ *funciones hiperbólicas*

▫ $\exp(z) = e^{z} = \exp(x+iy) = e^{x}\cdot e^{iy} = e^{x}(\cos(y) + i\,\operatorname{sen}(y))$ *donde* $z \in \mathbb{C}$

▫ $\exp^{a}(x) = (e^{x})^{a} = e^{ax} = \exp(ax)$

▫ $\exp(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x$ *(pues es la función inversa a* $\ln(x)$ *)*

↑ subir

Derivada

$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x} \Leftrightarrow \text{satisface la ecuación diferencial } \frac{dy}{dx} = y$$

▫ *La ecuación diferencial* $y' + P(x)\,y = Q(x)$ *tiene por solución :*

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]$$

(*la expresión* $e^{-\int P(x)\,dx}$ *es factor integrante de la ecuación*)

Integral

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C\ ;\ \int e^{nx}\,dx = \frac{e^{nx}}{n} + C$$

Serie de Maclaurin

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

↑ subir

Desigualdades importantes

$\ln(x) < x - 1 < x < x + 1 < e^{x} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

$e^{-\frac{x}{1-x}} < 1 - x < e^{-x} \quad si\ x < 1$

$\dfrac{x}{1+x} < 1 - e^{-x} < x \quad si\ x < -1$

$x < e^x - 1 < \dfrac{x}{1-x} \quad si\ x < 1$

$1 + x > e^{\frac{1}{1+x}} \quad si\ x > -1$

$e^x > \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^y > e^{\frac{xy}{x+y}} \quad si\ x,\ y > 0$

Función Logaritmo

Definición

$Si\ a^b = c \iff \log_a(c) = b \ \ ssi\ \ a > 0 \Rightarrow c > 0$

$\therefore$ el logaritmo entrega el exponente (b) conociendo la base (a) y la potencia (c).

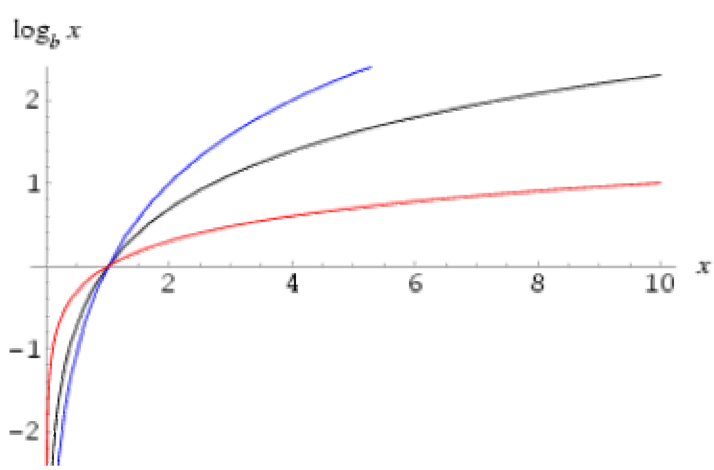
• NOTA: Se usa log(x) para referirse a los logaritmos en general, pero si en el contexto se nombra ln(x) entonces se refiere específicamente al logaritmo natural con base e=2.71828... $\therefore$ si se habla de log(x) en el mismo texto hace referencia al logaritmo de base 10.

Definición integral

$$f(x) = \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Gráfica de la función logarítmica

La curva de color azul es logaritmo de base 2 de x, la de color negro es base e, la de color rojo es de base 10 $\therefore$ a mayor base, mayor es a la izquierda de x=1 y menor a la derecha.



$Dom\ ln(x) = \mathbb{R}^+;\ Rec\ ln(x) = \mathbb{R};$

Siempre creciente↗ a tasas decrecientes (curva cóncava) con intercepto en eje X en $x = 1$.

↑ subir

Propiedades del logaritmo

$log_a(1) = 0$ pues $a^0 = 1$

$log_a(a) = 1$ pues $a^1 = a$

$log(a) + log(b) = log(a \cdot b)$

$log(a) - log(b) = log\left(\frac{a}{b}\right)$

$log(a^b) = b \cdot log(a)$

$log\left(\sqrt[n]{a}\right) = log(a^{1/n}) = \frac{1}{n} log(a)$

$log\left(\sqrt[n]{a^m}\right) = log(a^{m/n}) = \frac{m}{n} log(a)$

• *NOTA: A partir de la 3^{era} propiedad permite transformar un producto, división, potencia o raíz en una suma, resta, o producto simple, lo que era muy aprovechado antes de la llegada de las calculadoras, ocupando tablas de logaritmo y antilogaritmo para llegar al resultado sin realizar demasiado trabajo.*

↑ subir

Cambio de base

$$log_y(x) = \frac{ln(x)}{ln(y)} = \frac{log(x)}{log(y)} = \frac{log_b(x)}{log_b(y)}$$

• *NOTA: Se puede llevar el logaritmo a una base conocida como 10 u otra a discreción.*

Derivada

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad \left(\text{sin embargo para logaritmos no naturales: } \frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)\,x}\right)$$

Integral

$$\int \ln(x) = x\ln(x) - x + C$$

⇡ subir

Serie de Maclaurin

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \quad si\ -1 < x < 1$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \cdots \quad si\ -1 < x < 1$$

💡 *Lo anterior nace de la igualdad algebraica:*

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$$

Si $n \to \infty$ *tendrá un resultado finito si* $|x| < 1$ *pues* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ $\therefore$ *nos queda:*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \quad si\ -1 < x < 1 \qquad (1)$$

integrando:

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \ldots \quad si\ -1 < x < 1$$

Al sustituir x *por* $-x$ *en la igualdad (1):*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots \quad si\ -1 < x < 1$$

luego al integrar:

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots \quad si\ -1 < x < 1$$

⇡ subir

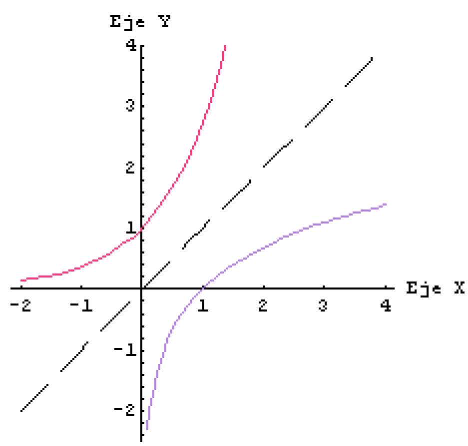
Función exponencial

Definición

$f(x) = e^x$ donde $e = 2.718281828459045235360287471352662497757\ldots$

Gráfica de la función exponencial y logaritmo

En siguiente gráfico se muestran la función exponencial (en rojo) y logaritmo en violeta y la recta $y = x$ como un eje de simetría entre ambas curvas lo que demuestra gráficamente que se trata de funciones inversas.



$\mathrm{Dom}\, e^x = \mathbb{R};\ \mathrm{Rec}\, e^x = \mathbb{R}^+;$

Siempre creciente ↗ a tasas crecientes (curva roja convexa)
Intercepto con eje Y en $y = 1$.

↑ subir

Número e

El número e es un número irracional (infinitas cifras decimales y no periódicas), descubierto por el matemático suizo Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII), que ha demostrado ser trascendente en el campo del análisis matemático.

El número e con 65 decimales es:

$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ 95749\ 66967\ 6277$

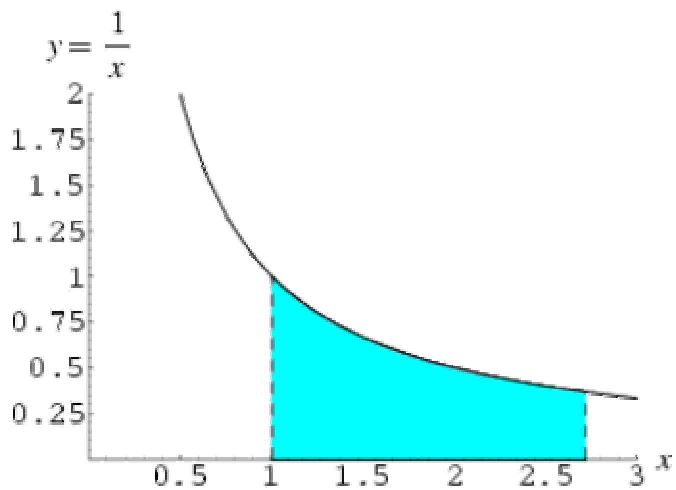
▫ *El número e se puede obtener como un límite infinito reflejando el crecimiento de un capital a interés compuesto donde el periodo (t) y la tasa (r) son inversamente proporcionales:*

$$C = C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \quad \Rightarrow \quad e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

▫ *Tambien puede expresarse como una serie infinita:*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{(publicado por Isaac Newton 1669)}$$

▫ *El número e es el único número donde el área entre la hipérbola* $y = \frac{1}{x}$ *y el eje X, desde la vertical* $x = 1$ *hacia adelante es 1, o bien* $\int_1^e \frac{1}{t}\, dt = \ln(e) = 1$



▫ *Puede generarse como la fracción continua* $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}}}}}$$

▫ *El producto de Pippenger similar a las fórmulas de Wallis:*

$$\frac{e}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{4}{5}\ \frac{6}{5}\ \frac{6}{7}\ \frac{8}{7}\right)^{1/8} \cdots \frac{2^{2^{n-1}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2^{n-2}\right)\right)^4}{\pi \left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2^{n-1}\right)\right)^2} \cdots$$

▫ *También se obtiene indirectamente usando la relación recurrente :*

$$a_n = n\,(a_{n-1} + 1) \quad \text{con } a_1 = a^{-1} \quad \text{y calculando } \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_n^{-1}) \rightarrow e^a$$

▫ *Toda potencia* $y = a^b$ *se puede escribir como* $y = e^{b \ln(a)}$

↑ subir

Propiedades

Función exponencial puede escribirse como $f(x) = \exp(x) = e^x$

Satisface las igualdades :

▫ $\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$

▫ $\exp(x-y) = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

▫ $\exp(x) = e^x = \cosh(x) + \operatorname{senh}(x)$ *donde* $\operatorname{senh}(x), \cosh(x)$ *funciones hiperbólicas*

▫ $\exp(z) = e^z = \exp(x + i\,y) = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\,\operatorname{sen}(y))$ *donde* $z \in \mathbb{C}$

▫ $\exp^a(x) = (e^x)^a = e^{ax} = \exp(ax)$

▫ $\exp(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x$ *(pues es la función inversa a* $\ln(x)$ *)*

↑ subir

Derivada

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \Leftrightarrow \text{satisface la ecuación diferencial } \frac{dy}{dx} = y$$

▫ *La ecuación diferencial* $y' + P(x)\,y = Q(x)$ *tiene por solución :*

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]$$

(*la expresión* $e^{-\int P(x)\,dx}$ *es factor integrante de la ecuación*)

Integral

$$\int e^x\,dx = e^x + C \ ; \ \int e^{nx}\,dx = \frac{e^{nx}}{n} + C$$

Serie de Maclaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

↑ subir

Desigualdades importantes

$$\ln(x) < x - 1 < x < x + 1 < e^x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-\frac{x}{1-x}} < 1 - x < e^{-x} \quad \text{si } x < 1$$

$$\frac{x}{1+x} < 1 - e^{-x} < x \quad \text{si } x < -1$$

$$x < e^x - 1 < \frac{x}{1-x} \quad \text{si } x < 1$$

$$1 + x > e^{\frac{1}{1+x}} \quad \text{si } x > -1$$

$$e^x > \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y > e^{\frac{xy}{x+y}} \quad \text{si } x,\ y > 0$$